PrivateTeacher

Maîtriser les Sciences Exactes

STATISTIQUES
Probabilités et Distribution Normale
Série d'exercices

Julien RUPPEN

08 May, 2026

Abstract

Toute variable X distribuée normalement peut être convertie en score z par la transformation z = (X - mu) / sigma. Cette opération ramène n'importe quelle loi normale N(mu, sigma^2) à une distribution unique – la loi centrée réduite N(0, 1) – dont une seule table suffit pour lire toutes les probabilités cumulées. Développée à l'ère pré-informatique, cette procédure n'a plus d'utilité pratique aujourd'hui : les logiciels calculent directement. Son intérêt reste pédagogique. Travailler avec la table force l'étudiant à raisonner en termes de probabilité complémentaire, de symétrie et d'aire sous la courbe – trois réflexes qui ancrent durablement la logique probabiliste.

Contents

1. Exercice 1 — Temps de réaction dans la tâche de Stroop

La **tâche de Stroop** est l'une des procédures les plus classiques en psychologie cognitive pour étudier l'interférence attentionnelle. Des mots de couleur sont présentés dans une encre qui correspond (condition congruente) ou non (condition incongruente) à leur signification. En condition congruente — "ROUGE" écrit en rouge, "BLEU" écrit en bleu — il n'existe aucun conflit entre les deux informations. Les temps de réaction (TR) sont plus courts et moins dispersés : cette condition sert de ligne de base dans les protocoles d'inhibition cognitive.

Dans cette étude, 200 participants ont effectué la tâche en condition congruente. L'analyse préalable confirme que les TR suivent une distribution normale de paramètres $\mu = 480$ ms et $\sigma = 60$ ms :

$$X \sim \mathcal{N}(480,\ 60^2)$$

Le graphique ci-dessous présente la distribution empirique des TR (panneau gauche) et sa transformation en scores z (panneau droit). La flèche rouge matérialise l'opération de standardisation : $z = (X - \mu)\,/\,\sigma$. Cette transformation ramène la distribution $\mathcal{N}(480, 60^2)$ à la loi centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, dont une seule table suffit pour lire toutes les probabilités cumulées $\Phi(z)$.

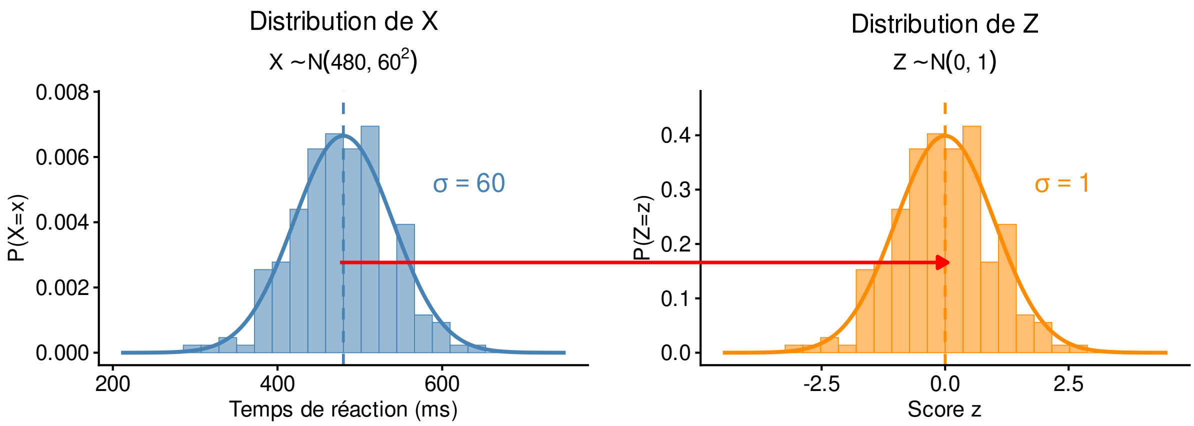


Figure 1: Distribution des temps de réaction en condition congruente (panneau gauche, $X \sim \mathcal{N}(480,\ 60^2)$) et distribution centrée réduite correspondante (panneau droit, $Z \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$). La flèche rouge indique la transformation $z = (X - \mu)\,/\,\sigma$.

La loi Z est universelle : peu importe que μ soit 480 ou 210, que σ soit 60 ou 15, le passage par la table Z donne toujours le résultat exact. Travailler avec cette table force à raisonner en termes de position relative — combien d'écarts-types sépare une valeur de la moyenne — et ancre durablement la logique probabiliste.

1.1. Question de recherche

Sachant que les TR en condition congruente suivent $\mathcal{N}(480,\ 60^2)$, quelles proportions de participants se situent dans tel ou tel intervalle, et pour quelle valeur brute une probabilité cible est-elle atteinte ?

1.2. Exercices

Q1 — Quelle est la probabilité qu'un participant tiré au hasard présente un temps de réaction compris entre 420 ms et 540 ms ?

Q2 — Quelle est la probabilité qu'un participant présente un temps de réaction supérieur à 600 ms ?

Q3 — Quelle est la probabilité qu'un participant présente un temps de réaction inférieur à 400 ms ?

Q4 — Pour quelle valeur de TR la probabilité $\Pr(X < x) = 0.4$ est-elle atteinte ?

Q5 — Pour quelle valeur de TR la probabilité $\Pr(X > x) = 0.8$ est-elle atteinte ?

Q6 — Quelle est la probabilité qu'un participant présente un TR inférieur à 360 ms **ou** supérieur à 600 ms ?

Q7 — Pour quelle valeur x la probabilité $\Pr(X < x \text{ ou } X > 2\mu - x) = 0.05$ est-elle atteinte ?

Q8 — Quelle est la probabilité que le temps de réaction d'un participant soit **exactement** égal à 480 ms ?

Q9 — Calculer les trois probabilités suivantes :

1. $\Pr(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
2. $\Pr(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$
3. $\Pr(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

Que remarque-t-on ?

1.3. Vérification

Le panneau gauche du graphique permet une validation visuelle. La vline tiretée marque $\mu = 480$ ms. L'essentiel de la distribution s'étend entre 360 et 600 ms, ce qui concorde avec Q9 : environ 95% des observations se trouvent dans $\mu \pm 2\sigma$. La queue droite au-delà de 600 ms est visuellement étroite, cohérente avec la probabilité faible calculée en Q

(0.0228). La symétrie des deux queues en Q6 est directement lisible : 360 et 600 ms sont équidistants de μ.

2. Exercice 2 — Score de QI mesuré par le WAIS

Le **WAIS** (Wechsler Adult Intelligence Scale) est l'instrument de mesure du quotient intellectuel le plus utilisé en clinique et en recherche. Il ne mesure pas une capacité unique : il agrège une batterie de sous-tests couvrant le raisonnement verbal, perceptif, la mémoire de travail et la vitesse de traitement. Le score global est standardisé par construction pour que la population adulte de référence suive $\mathcal{N}(100,\ 15^2)$ — une moyenne de 100 et un écart-type de 15 points. Cette standardisation est délibérée : elle permet des comparaisons directes entre individus, entre groupes et entre études, quel que soit le moment de passation.

Dans cet exercice, 200 adultes ont passé le WAIS dans le cadre d'une étude de validation. L'analyse confirme que les scores suivent bien la distribution attendue :

$$X \sim \mathcal{N}(100,\ 15^2)$$

Le graphique ci-dessous présente la distribution empirique des scores (panneau gauche) et les scores z correspondants (panneau droit). La flèche rouge représente la transformation de standardisation $z = (X - \mu) / \sigma$, qui ramène chaque score brut à sa position relative dans la distribution.

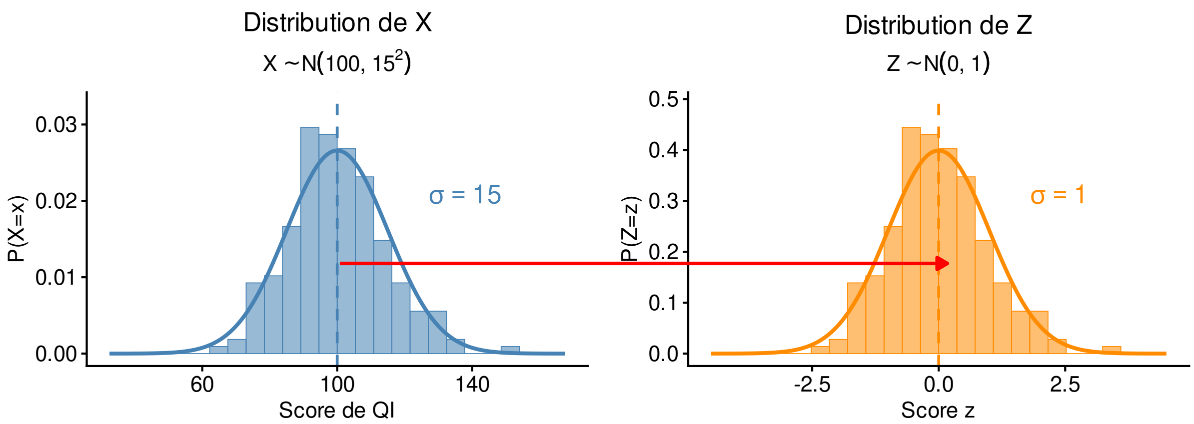


Figure 2: Distribution des scores de QI (WAIS) dans l'échantillon (panneau gauche, $X \sim \mathcal{N}(100,\ 15^2)$) et distribution centrée réduite correspondante (panneau droit, $Z \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$). La flèche rouge indique la transformation $z = (X - \mu) / \sigma$.

Une propriété importante de cette distribution : les scores de QI sont symétriques autour de la moyenne par construction. Un score à k points sous la moyenne a exactement la même probabilité qu'un score à k points au-dessus. En termes de table Z, cette symétrie se traduit par $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ — une relation que plusieurs questions de cet exercice exploitent directement.

2.1. Question de recherche

Sachant que les scores de QI suivent $\mathcal{N}(100,\ 15^2)$, quelles proportions de la population se situent dans tel ou tel intervalle, et quel score brut correspond à une probabilité cible donnée ?

2.2. Exercices

Q1 — Quelle est la probabilité qu'un individu tiré au hasard présente un score de QI compris entre 70 et 85 ?

Q2 — Quelle est la probabilité qu'un individu présente un score de QI supérieur à 130 ?

Q3 — Quelle est la probabilité qu'un individu présente un score de QI inférieur à 70 ?

Q4 — Pour quelle valeur de QI la probabilité $\Pr(X < x) = 0.15$ est-elle atteinte ?

Q5 — Pour quelle valeur de QI la probabilité $\Pr(X > x) = 0.9$ est-elle atteinte ?

Q6 — Quelle est la probabilité qu'un individu présente un QI inférieur à 70 **ou** supérieur à 130 ?

Q7 — Pour quelle valeur x la probabilité $\Pr(X < x \text{ ou } X > 2\mu - x) = 0.1$ est-elle atteinte ?

Q8 — Quelle est la probabilité que le score de QI d'un individu soit **exactement** égal à 100 ?

Q9 — Calculer les trois probabilités suivantes :

1. $\Pr(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
2. $\Pr(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$
3. $\Pr(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

Que remarque-t-on ?

2.3. Vérification

Le panneau gauche du graphique permet une validation visuelle. La vline tiretée marque $\mu = 100$. L'essentiel de la distribution s'étend entre 70 et 130, ce qui concorde avec Q9 : environ 95% des observations se trouvent dans $\mu \pm 2\sigma$. Les queues aux deux extrémités sont symétriques et minces, cohérentes avec la probabilité de 0.0455 calculée en Q6. La queue droite au-delà de 130 est visuellement étroite, en accord avec la probabilité faible de 0.0228 obtenue en Q2. La symétrie entre 70 et 130 — équidistants de μ — est directement lisible sur le graphique.

3. Exercice 3 — Névrosisme mesuré par le NEO-PI-R

Le **névrosisme** est l'une des cinq grandes dimensions de la personnalité du modèle Big Five. Il mesure la tendance à ressentir des émotions négatives — anxiété, irritabilité, tristesse, vulnérabilité au stress. Un niveau élevé ne constitue pas un diagnostic clinique, mais il est associé à un risque accru de troubles anxieux et dépressifs, à une moins bonne régulation émotionnelle et à une plus grande réactivité aux événements stressants.

Le **NEO-PI-R** (Costa & McCrae) est l'instrument de référence pour mesurer les cinq dimensions. Les scores sont exprimés en **score T**, standardisés pour que la population adulte de référence suive $\mathcal{N}(50,\ 10^2)$: moyenne 50, écart-type 10. Cette métrique permet de situer immédiatement un individu dans la distribution de référence. Un score T supérieur à 65 — soit à plus de 1.5σ au-dessus de la moyenne — est conventionnellement associé à une instabilité émotionnelle marquée.

Dans cet exercice, 200 adultes ont complété le NEO-PI-R dans le cadre d'une étude sur la régulation émotionnelle. Les scores de névrosisme suivent :

$$X \sim \mathcal{N}(50,\ 10^2)$$

Le graphique ci-dessous présente la distribution empirique des scores (panneau gauche) et les scores z correspondants (panneau droit). La flèche rouge représente la transformation $z = (X - \mu)\,/\,\sigma$.

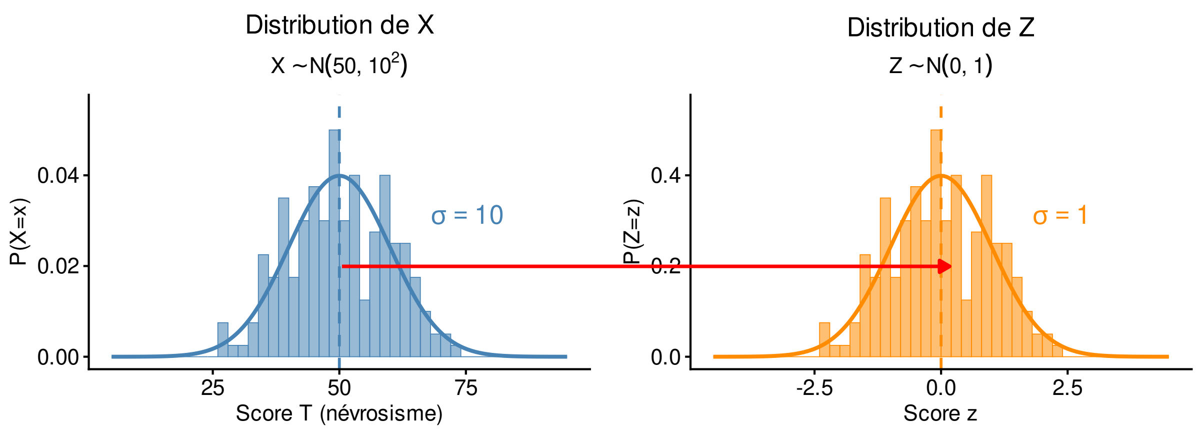


Figure 3: Distribution des scores de névrosisme (NEO-PI-R, score T) dans l'échantillon (panneau gauche, $X \sim \mathcal{N}(50,\ 10^2)$) et distribution centrée réduite correspondante (panneau droit, $Z \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$). La flèche rouge indique la transformation $z = (X - \mu)\,/\,\sigma$.

Une caractéristique de cet exercice mérite attention : Q1 porte sur un intervalle **asymétrique** autour de la moyenne. Contrairement aux sections précédentes où les deux bornes étaient du même côté, ici la borne gauche (45) est sous μ et la borne droite (60) est au-dessus. Les deux scores z ont des signes opposés : la probabilité se lit directement comme $\Phi(z_2) - \Phi(z_1)$, sans recours à la symétrie.

3.1. Question de recherche

Sachant que les scores de névrosisme suivent $\mathcal{N}(50,\ 10^2)$, quelle proportion de la population présente un niveau d'instabilité émotionnelle cliniquement notable, et pour quel score brut une probabilité cible est-elle atteinte ?

3.2. Exercices

Q1 — Quelle est la probabilité qu'un individu tiré au hasard présente un score de névrosisme compris entre 45 et 60 ?

Q2 — Quelle est la probabilité qu'un individu présente un score de névrosisme supérieur à 65 ?

Q3 — Quelle est la probabilité qu'un individu présente un score de névrosisme inférieur à 35 ?

Q4 — Pour quelle valeur de score T la probabilité $\Pr(X < x) = 0.25$ est-elle atteinte ?

Q5 — Pour quelle valeur de score T la probabilité $\Pr(X > x) = 0.2$ est-elle atteinte ?

Q6 — Quelle est la probabilité qu'un individu présente un score inférieur à 30 **ou** supérieur à 70 ?

Q7 — Pour quelle valeur x la probabilité $\Pr(X < x \text{ ou } X > 2\mu - x) = 0.05$ est-elle atteinte ?

Q8 — Quelle est la probabilité que le score de névrosisme d'un individu soit **exactement** égal à 50 ?

Q9 — Calculer les trois probabilités suivantes :

1. $\Pr(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
2. $\Pr(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$
3. $\Pr(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

Que remarque-t-on ?

3.3. Vérification

Le panneau gauche confirme visuellement les résultats. La vline tiretée marque $\mu = 50$. La distribution s'étend entre 30 et 70 pour l'essentiel, cohérent avec Q9 : environ 95% des observations dans $\mu \pm 2\sigma$. Les seuils 65 et 35 délimitent des queues symétriques et minces — la même probabilité 0.0668 de chaque côté, comme calculé en Q2 et Q3. La valeur 58.

obtenue en Q5 est bien au-dessus de la moyenne (50), ce qu'on peut lire directement sur le graphique : le 80e percentile se situe à droite de la vline.

4. Exercice 4 — Durée de sommeil en population étudiante

La recherche sur le sommeil des étudiants fait état d'un déficit chronique et généralisé. Les contraintes académiques, les horaires décalés et les usages numériques nocturnes convergent pour pousser la durée moyenne de sommeil en dessous des recommandations de 7 à 9 heures par nuit pour l'adulte jeune. Or les conséquences fonctionnelles sont documentées : altération de la consolidation mnésique, baisse des performances attentionnelles, dérégulation émotionnelle accrue.

Dans cet exercice, la durée de sommeil suit une loi normale de paramètres $\mu = 6.8$ h et $\sigma = 1.1$ h dans la population étudiante :

$$X \sim \mathcal{N}(6.8,\ 1.1^2)$$

Un échantillon de 200 étudiants a été recruté. Le graphique ci-dessous présente la distribution empirique des durées de sommeil (panneau gauche) et les scores z correspondants (panneau droit).

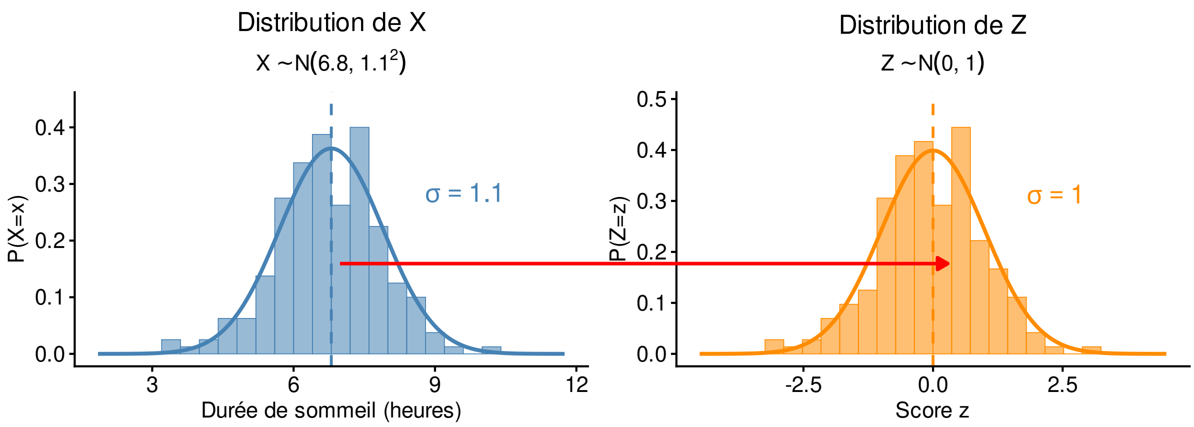


Figure 4: Distribution des durées de sommeil (heures) dans l'échantillon étudiant (panneau gauche, $X \sim \mathcal{N}(6.8,\ 1.1^2)$) et distribution centrée réduite correspondante (panneau droit, $Z \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$). La flèche rouge indique la transformation $z = (X - \mu)\,/\,\sigma$.

Cet exercice est conçu pour travailler les **scores z négatifs**. Les seuils d'insuffisance de sommeil (moins de 6 heures, moins de 5 heures) se situent tous sous la moyenne. Sur les sept questions à calcul, cinq produisent un z négatif — dont Q1 où les deux bornes sont inférieures à μ, ce qui impose d'appliquer la symétrie $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ à chaque borne séparément avant de soustraire.

4.1. Question de recherche

Sachant que la durée de sommeil des étudiants suit $\mathcal{N}(6.8,\ 1.1^2)$, quelle proportion dort moins de 6.5 heures par nuit, et à partir de quelle durée peut-on parler d'insuffisance rare ou sévère ?

4.2. Exercices

Q1 — Quelle est la probabilité qu'un étudiant tiré au hasard dorme entre 5 h et 6.5 h par nuit ?

Q2 — Quelle est la probabilité qu'un étudiant dorme plus de 8.5 h par nuit ?

Q3 — Quelle est la probabilité qu'un étudiant dorme moins de 5.5 h par nuit ?

Q4 — En dessous de quelle durée de sommeil se trouvent les 20% d'étudiants les moins dormeurs ?

Q5 — Au-dessus de quelle durée se trouvent les 75% d'étudiants dormant le plus ?

Q6 — Quelle est la probabilité qu'un étudiant dorme moins de 4.6 h **ou** plus de 9 h ?

Q7 — Pour quelle durée x la probabilité $\Pr(X < x \text{ ou } X > 2\mu - x) = 0.1$ est-elle atteinte ?

Q8 — Quelle est la probabilité qu'un étudiant dorme **exactement** 6.8 h par nuit ?

Q9 — Calculer les trois probabilités suivantes :

1. $\Pr(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
2. $\Pr(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$
3. $\Pr(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

Que remarque-t-on ?

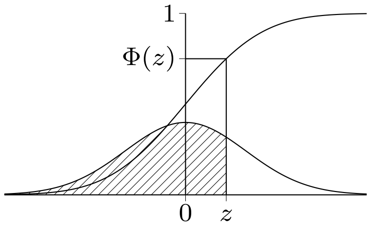
4.3. Vérification

Le panneau gauche confirme les résultats. La vline tiretée marque $\mu = 6.8$ h. Les deux bornes de Q1 (5 h et 6.5 h) sont visiblement à gauche de cette ligne — les deux z négatifs sont lisibles directement sur le graphique. La queue gauche au-delà de 4.6 h est étroite et symétrique à la queue droite au-delà de 9 h, cohérent avec la probabilité 0.0455 de Q6. La valeur 6.06 h obtenue en Q5 est bien en dessous de la vline, confirmant que 75% des étudiants dorment davantage.

TABLES DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

A. **Tables des lois associées à la loi Normale**

A.1. Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$



1° *Fonction de répartition de la loi Normale.* — La fonction de répartition Φ de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ est définie par $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u/\sqrt{2\pi}$, $z \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Exemples. — $\Phi(0{,}25) \approx 0{,}5987$, $\Phi(-0{,}32) = 1 - \Phi(0{,}32) \approx 1 - 0{,}6255 = 0{,}3745$.