Exercices corrigés

Exercice 001

Une firme fait passer des tests aux postulants pour certains postes de l'entreprise. Elle a pu établir que les résultats à ces tests sont distribués normalement avec une espérance = 73.2 et un écart-type = 7. Quelle est la probabilité que le prochain postulant obtienne un résultat inférieur à 70.0 ? Quelle est la probabilité que le prochain postulant obtienne un résultat supérieur à 82.8 ? Au-dessous de quelle note trouve-t-on 25% des postulants jugés les moins aptes ? *Réponses : 32.4%, 8.5%, 68.5%*

Les résultats sont normalement distribués

$\Longleftrightarrow \quad X \sim N(\mu ; \sigma^2)$

$\mu = 73.2$

$\sigma = 7$

a) Quelle est la probabilité que le prochain postulant obtienne une note inférieure à 70 ?

$\Longleftrightarrow$ Que vaut $P(X \leq 70)$?

$$P(X \leq 70) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{70-\mu}{\sigma}\right)$$

On a centré et réduit

$$= P\left(X^* \leq \frac{70-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(X^* \leq \frac{70-73.2}{7}\right)$$

$= P\left(X^* \leq \frac{70 - 73.2}{7}\right)$

$= P\left(X^* \leq -0.4571\right)$

par symmétrie on a
$P(X \leq -A) = 1 - P(X \leq A)$

$= 1 - P\left(X^* \leq 0.4571\right)$

l'aire sous la courbe
entre $-\infty$ et 0.4571
se note $\phi(0.4571)$

$= 1 - \phi(0.4571)$

on lit $\phi(0.4571)$ dans
la table des quantiles

$= 1 - 0.6772$

$= 0.3228$

$= \underline{\underline{32.3\ \%}}$

$0.4571 \simeq 0.46$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	[illegible]	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	$\boxed{.6772}$	.6808	.6844	.6879

b) Quelle est la probabilité que le prochain postulant obtienne une note supérieure à 82.8

$\Leftrightarrow$ Que vaut $P(X > 82.8)$

$$
\begin{aligned}
P(X > 82.8) &= 1 - P(X \leq 82.8) \\
&= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{82.8-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - P\left(X^* \leq \frac{82.8-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - P\left(X^* \leq \frac{82.8-73.2}{7}\right) \\
&= 1 - P(X^* \leq 1.37) \\
&= 1 - \phi(1.37) \\
&= 1 - 0.9147 \\
&= 0.0853 \\
&= \underline{\underline{8.5\ \%}}
\end{aligned}
$$

1.37

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	[illegible]	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	$\boxed{.9147}$	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	[illegible]	.9306	.9319

c) En dessous de quelle note trouve-t-on 25 % des postulants ?

Cette question est posée à l'envers.

D'habitude on demande :
" quelle est la probabilité d'observer telle valeur ? "

Et cette fois on demande :
" quelle valeur me donnerait telle probabilité ? "

On fait comme si on connaissait cette valeur, et on la note x_{min}

On peut maintenant formuler la question ainsi :

Trouver x_{min} tel que $P(X \leq x_{min}) = 25\%$

$$P(X \leq x_{min}) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_{min}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(X^* \leq x^*_{min})$$

$$= \phi(x^*_{min})$$

$$= 25\%$$

$$= 0.25$$

$$P(X^* \leq x^*_{min}) = 0.25$$

$$= 1 - 0.75$$

on utilise cette astuce car 0.25 ne se trouve pas dans la table. il s'agit d'une propriété de symétrie

$$= \phi(x^*_{min})$$

$$1 - 0.75 = \phi(X^*_{min})$$

$$0.75 = \phi(-X^*_{min})$$

propriété de symétrie

En lisant maintenant la table à l'envers, on trouve :

$$\phi(0.67) = 0.7486 \simeq 0.75$$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	[illegible]	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	[illegible]	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	[illegible]	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	[illegible]	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	[illegible]	.6844	.6879
0.5	[illegible]	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{.7486}$	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	[illegible]	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389

$$0.75 = \phi(-x^*_{min})$$

$$= \phi(0.67)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-x^*_{min} = 0.67$$

Or, on a

$$x^*_{min} = \frac{x_{min} - \mu}{\sigma}$$

$$-x^*_{min} = \frac{-x_{min} + \mu}{\sigma}$$

$$= 0.67$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{-x_{min} + \mu}{\sigma} = 0.67$$

$$-x_{min} + \mu = 0.67\,\sigma$$

$$-x_{min} = 0.67\,\sigma - \mu$$

$$x_{min} = \mu - 0.67\,\sigma$$

$$= 73.2 - 0.67 \cdot 7$$

$$= \underline{\underline{68.51}}$$

Exercice 002

En admettant que les températures du mois de juillet ont en un endroit une distribution normale de moyenne 18,2° C et d'écart-type 3,6° C, calculer la probabilité que la température soit comprise un jour de juillet entre 20° C et 25° C.

La température suit une loi normale
d'espérence $\mu = 18.2$
et d'écart-type $\sigma = 3.6$

$\Longleftrightarrow \quad X \sim N(18.2, 3.6^2)$

Quelle est la probabilité que la température soit comprise entre 20 et 25 degrès ?

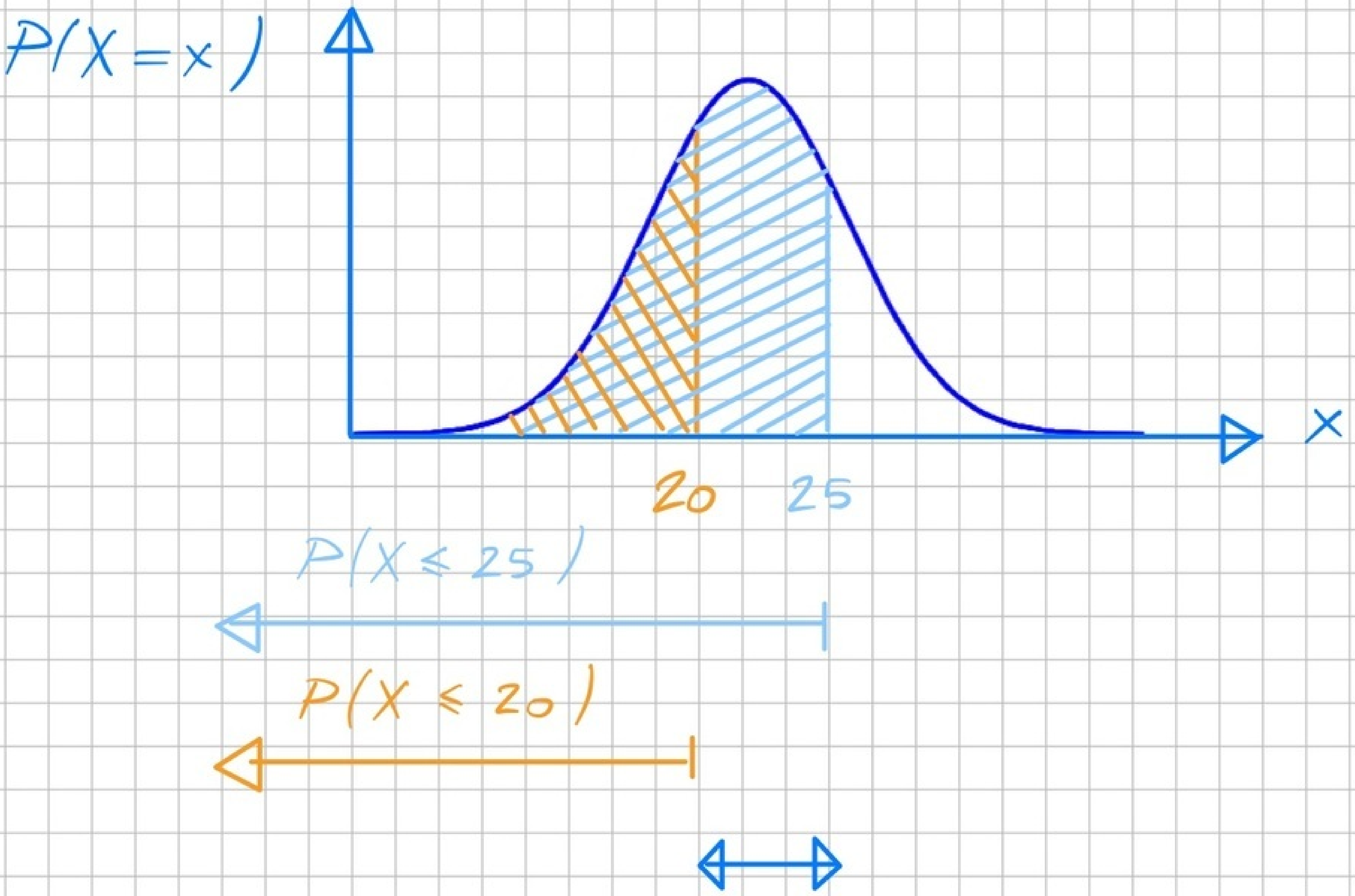
$\Longleftrightarrow$

Que vaut $P(20 < X < 25)$?

Or,

$$P(20 < X < 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 20)$$

On peut se représenter graphiquement cette égalité de la manière suivante :



$$P(X \leq 25) - P(X \leq 20)$$

On calcule donc chaque de ces deux probabilités séparément

1) $P(X \leq 25)$
2) $P(X \leq 20)$

$$P(X \leq 25) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{25-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(X^* \leq \frac{25-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(X^* \leq \frac{25-18.2}{3.6}\right)$$

$$= P(X^* \leq 1.89)$$

$$= \phi(1.89)$$

$$= \underline{0.9706}$$

1.89

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	[illegible]
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	$\boxed{.9706}$
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	[illegible]

$$P(X \leq 20) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{20-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(X^* \leq \frac{20-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(X^* \leq \frac{20-18.2}{3.6}\right)$$

$$= P(X^* \leq 0.50)$$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 20) &= P(X^{*} \leq 0.50) \\
&= \phi(0.50) \\
&= \underline{0.6915}
\end{aligned}
$$

0.50

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.5	$\boxed{.6915}$	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389

On peut maintenant calculer :

$$
\begin{aligned}
P(20 < X < 25) &= P(X \leq 25) - P(X \leq 20) \\
&= 0.9706 - 0.6915 \\
&= \underline{\underline{0.2791}}
\end{aligned}
$$

Ainsi, la probabilité de mesurer une température comprise entre 20 et 25 degrès est de $\underline{\underline{27.91\ \%}}$

Exercice 003

Les articles produits par une machine ont un poids qui suit une loi normale de moyenne 5.15g et d'écart- type 0.37g. Trouver la probabilité pour qu'un ensemble de 100 articles ait une masse (totale) comprise entre 514 et 516g? supérieure à 516g? Attention à l'écart-type à considérer pour la distribution des 100 articles. *Réponses : 21.3%, 39.3%*

Nous allons voir ici comment étudier le comportement de 100 articles à partir des caractéristique d'un seul d'entre eux.

Le poids X <u>d'un seul</u> article suit une loi normale :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = 5.15$$

$$\sigma = 0.37$$

On s'imagine bien que si le poids moyen d'un article vaut 5.15, alors le poids moyen de 100 articles vaut 100 fois plus, soit 515.

On note $\mu_{100} = 100 \cdot \mu$ le poids moyen de 100 articles

Nous allons donc dès à présent travailler avec une nouvelle variable : X_{100}

X_{100} désigne le poids de 100 articles.

Tout comme la variable aléatoire X, la variable aléatoire X_{100} suit une loi normale.

Pour trouver ses paramètres, on utilise une <u>propriété d'additivité</u> de la gaussienne

Nous venons de voir :

$$\mu_{100} = 100\,\mu$$

Concernant la mesure de dispersion, c'est la variance σ^2 qui est additive et non pas l'écart-type σ.

On a $\qquad \sigma^2 = 0.37^2$

$\qquad\qquad = 0.1369$

et donc $\qquad \sigma_{100}^2 = 100 \cdot \sigma^2$

$\qquad\qquad (100\sigma)^2 \neq 100\sigma^2$

$\qquad\qquad = 100 \cdot 0.1369$

$\qquad\qquad = 13,69$

On dit que :

La loi normale est additive par rapport à ses deux paramètres μ et σ^2.

$$\mu_{100} = 100\,\mu$$
$$\sigma^2_{100} = 100\,\sigma^2$$

Dans notre cas

$$\mu_{100} = 515$$
$$\sigma^2_{100} = 13.69$$

On a donc :

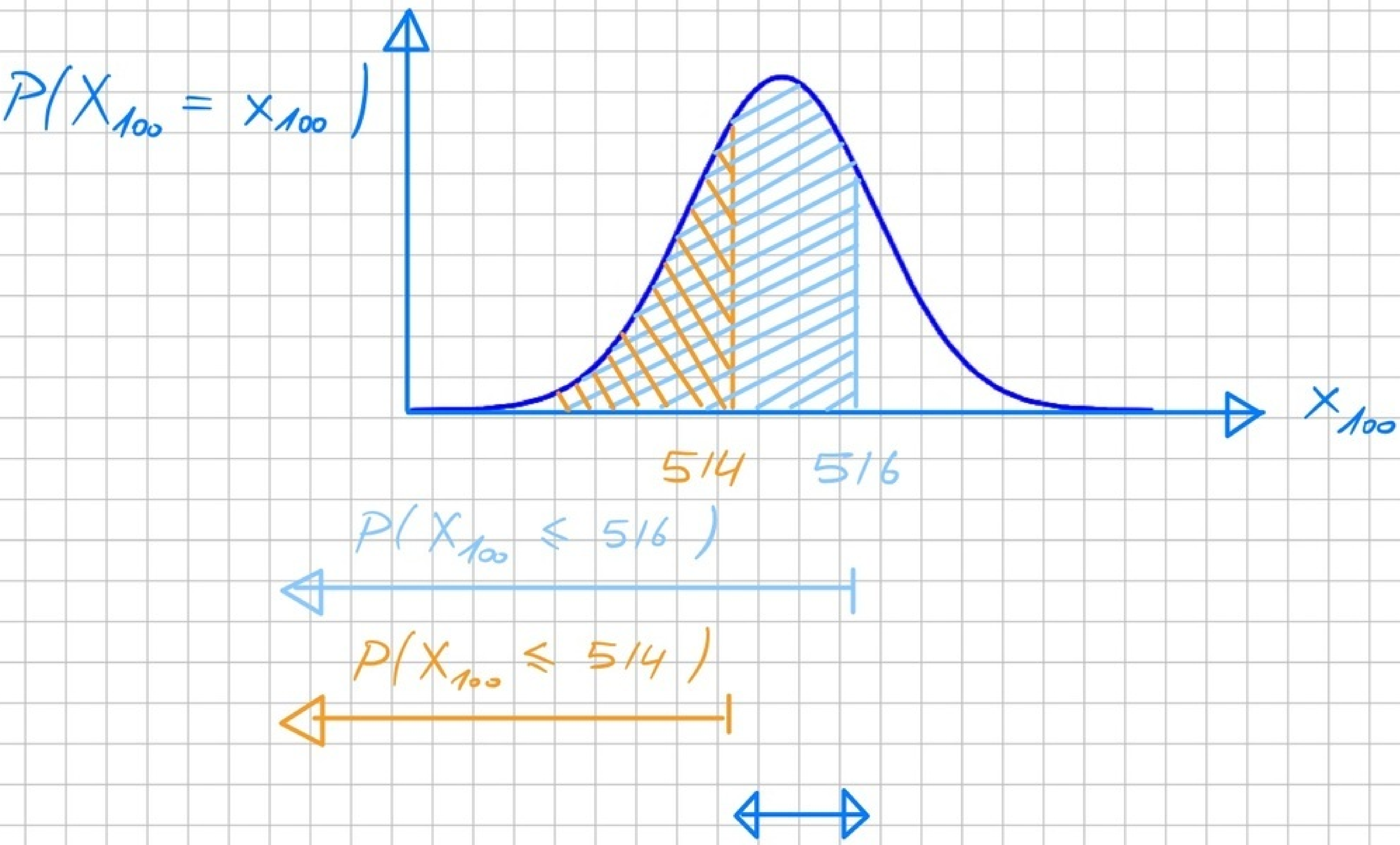
$$X_{100} \sim N(\mu_{100}, \sigma^2_{100})$$
$$\sim N(515, 13.69)$$

et nous pouvons dès maintenant répondre aux questions comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant :

a) Quelle est la probabilité qu'un ensemble de 100 objets aie un poids compris entre 514 et 516

$\Leftrightarrow$ Que vaut $P(514 \leq X_{100} \leq 516)$?

$$P(5/4 \leq X_{100} \leq 5/6)$$
$$= P(X_{100} \leq 5/6) - P(X_{100} \leq 5/4)$$



$$P(X_{100} \leq 5/6) - P(X_{100} \leq 5/4)$$

On calcule chacune de ces deux quantité séparément :

1) $P(X_{100} \leq 5/6)$

2) $P(X_{100} \leq 5/4)$

$$P(X_{100} \leq 516) = P\left(\frac{X_{100} - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \leq \frac{516 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}}\right)$$

$$= P\left(X_{100}^* \leq \frac{516 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}}\right)$$

$$= P\left(X_{100}^* \leq \frac{516 - 515}{3.7}\right)$$

$$= P\left(X_{100}^* \leq 0.27\right)$$

$$= \phi(0.27)$$

$$= \underline{0.6064}$$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	$\boxed{.6064}$	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879

$$P(X_{100} \leq 514) = P\left(\frac{X_{100} - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \leq \frac{514 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}}\right)$$

$$= P\left(X_{100}^* \leq \frac{514 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}}\right)$$

$$= P\left(X_{100}^* \leq \frac{514 - 515}{3.7}\right)$$

$$P(X_{100} \leq 514) = P\left(X_{100}^{*} \leq \frac{514 - 515}{3.7}\right)$$

$$= P\left(X_{100}^{*} \leq -0.27\right)$$

$$= 1 - P\left(X_{100}^{*} \leq 0.27\right)$$

$$= 1 - \phi(0.27)$$

$$= 1 - 0.6064$$

$$= \underline{0.3936}$$

On a donc :

$$P(514 \leq X_{100} \leq 516)$$

$$= P(X_{100} \leq 516) - P(X_{100} \leq 514)$$

$$= 0.6064 - 0.3936$$

$$= \underline{\underline{0.2128}}$$

Ainsi, la probabilité que le poids d'un ensemble de 100 articles soit compris entre 514 et 516 est de <u>21.28 %</u>

b) Quelle est la probabilité qu'un ensemble d'objet aie un poids de plus de 516 g ?

$\Longleftrightarrow$ Que vaut $P(X_{100} > 516)$?

$$
\begin{aligned}
P(X_{100} > 516) &= 1 - P(X_{100} \leq 516) \\
&= 1 - P\left(\frac{X_{100} - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \leq \frac{516 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}}\right) \\
&= 1 - P\left(X_{100}^* \leq \frac{516 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}}\right) \\
&= 1 - P\left(X_{100}^* \leq \frac{516 - 515}{3.7}\right) \\
&= 1 - P(X_{100}^* \leq 0.27) \\
&= 1 - \Phi(0.27) \\
&= 1 - 0.6064 \\
&= \underline{\underline{0.3936}}
\end{aligned}
$$

La probabilité qu'un ensemble d'objet aie un poids de plus de 516 g est de $\underline{\underline{39.36\ \%}}$

Exercice 004

Le contenu en nicotine d'une cigarette d'une marque précise est une variable aléatoire d'espérance (moyenne) $\mu = 0.8$ mg et d'écart-type $\sigma = 0.1$ mg. Un certain fumeur de cette marque consomme 5 paquets par semaine (1 paquet = 20 cigarettes).

a) Quelle est la probabilité qu'il absorbe en une semaine plus de 82 mg de nicotine ?

b) Quelle est la probabilité qu'il absorbe en une semaine moins de 79 mg de nicotine ?

Désignons par X le contenu en nicotine d'une seule cigarette

X suit une loi normale de moyenne $\mu = 0.8$ et d'écart-type $\sigma = 0.1$

On note $X \sim N(0.8, 0.1^2)$

Or, on s'intéresse au contenu en nicotine de 100 cigarettes.

On utilise la propriété d'additivité de la fonction gausienne :

La loi normale est additive par rapport à ses deux paramètres μ et σ^2.

On peut dès lors calculer :

$$\mu_{100} = 100\,\mu$$

$$\sigma^2_{100} = 100\,\sigma^2$$

On a : $\mu_{100} = 100\,\mu$
$= 100 \cdot 0.8$
$= 80$

$\sigma^2_{100} = 100\,\sigma^2$
$= 100 \cdot 0.1^2$
$= 100 \cdot 0.01$
$= 1$

Le contenu en nicotine de 100 cigarettes suit donc une loi normale de moyenne $\mu_{100} = 80$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma^2_{100}} = 1$

On note $X_{100} \sim N(80, 1^2)$

a) Quelle est la probabilité d'absorber plus de 82 g de nicotine en fumant 100 cigarettes ?

$\iff$ Que vaut $P(X_{100} > 82)$?

$$P(X_{100} > 82) = 1 - P(X_{100} \leq 82)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X_{100} - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \leq \frac{82 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \right)$$

$$= 1 - P\left(X_{100}^* \leq \frac{82 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \right)$$

$$= 1 - P\left(X_{100}^* \leq \frac{82 - 80}{1} \right)$$

$$= 1 - P(X_{100}^* \leq 2)$$

$$= 1 - \phi(2)$$

$$= 1 - 0.9772$$

$$= \underline{\underline{0.0228}}$$

2.00

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	$\boxed{.9772}$	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936

Ainsi, la probabilité d'absorber plus de 82 g de nicotine en fumant 100 cigarettes est de <u>2.28 %</u>

b) Quelle est la probabilité d'absorber moins de 79 g de nicotine avec 100 cigarettes ?

$\Longleftrightarrow$ Que vaut $P(X_{100} \leq 79)$?

$$P(X_{100} \leq 79) = P\left(\frac{X_{100} - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \leq \frac{79 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \right)$$

$$= P\left(X_{100}^* \leq \frac{79 - \mu_{100}}{\sqrt{\sigma_{100}^2}} \right)$$

$$= P\left(X_{100}^* \leq \frac{79 - 80}{1} \right)$$

$$= P\left(X_{100}^* \leq -1 \right)$$

$$= 1 - P\left(X_{100}^* \leq 1 \right)$$

$$= 1 - \phi(1)$$

$$= 1 - 0.8413$$

$$= \underline{\underline{0.1587}} = \underline{\underline{15.87\ \%}}$$

1

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	$\boxed{.8413}$	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	[illegible]	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319

Les Statistiques
Expliquées Simplement

Cours Privés Individuels

- Progrès rapide
- Réponses précises
- Cours sur mesure

60 CHF / heure

Cours Privés Collectifs

- Travail d'équipe
- Réponse aux questions
- Cours préparé d'avance
- Dès deux personnes

40 CHF / h / Pers.

Modules à Choix

- Maîtriser 1 sujet précis
- Formation intensive
- Exercices pratiques
- Groupe de 5 pers. max
- Durée: 2 heures

40 CHF / heure

Pack 12 Heures

- Se mettre à jour
- Suivi personnalisé
- Méthode de travail
- Exces de renforcement
- 10h + 2h Offertes

50 CHF / heure

Voici mes disponibilités

Genève UNIMAIL :

Lundi et Vendredi
14h00 – 18h00

Lausanne ANTHROPOLE :

Mardi, Mercredi et Jeudi
14h00 – 18h00

Visio TELEGRAM :

Lundi – Vendredi
9h00 – 11h00
18h00 – 20h00

Réservation Calendrier
(Min 2 jours à l'avance)

Horaires WEEKEND

J'ai la possibilité de mettre à disposition des périodes durant le weekend si la situation le demande.

Mes tarifs sont alors majoré de 50%