PrivateTeacher
Cours Privés de Science

Coordonnées Sphériques

Ce document vous permettra de comprendre comment utiliser les coordonnées sphériques.

Vous apprendrez tout d'abord quels sont les avantages de réaliser un changement de référentiel. Un exercice complet et corrigé dans les détails vous permettra ensuite de pratiquer les calculs à l'aide d'un exemple très concret.

Le système de coordonnées

Lorsque l'on souhaite décrire le mouvement d'un objet, on cherche avant tout un moyen de le situer dans l'espace.

On utilise à cette fin un système de coordonnées.

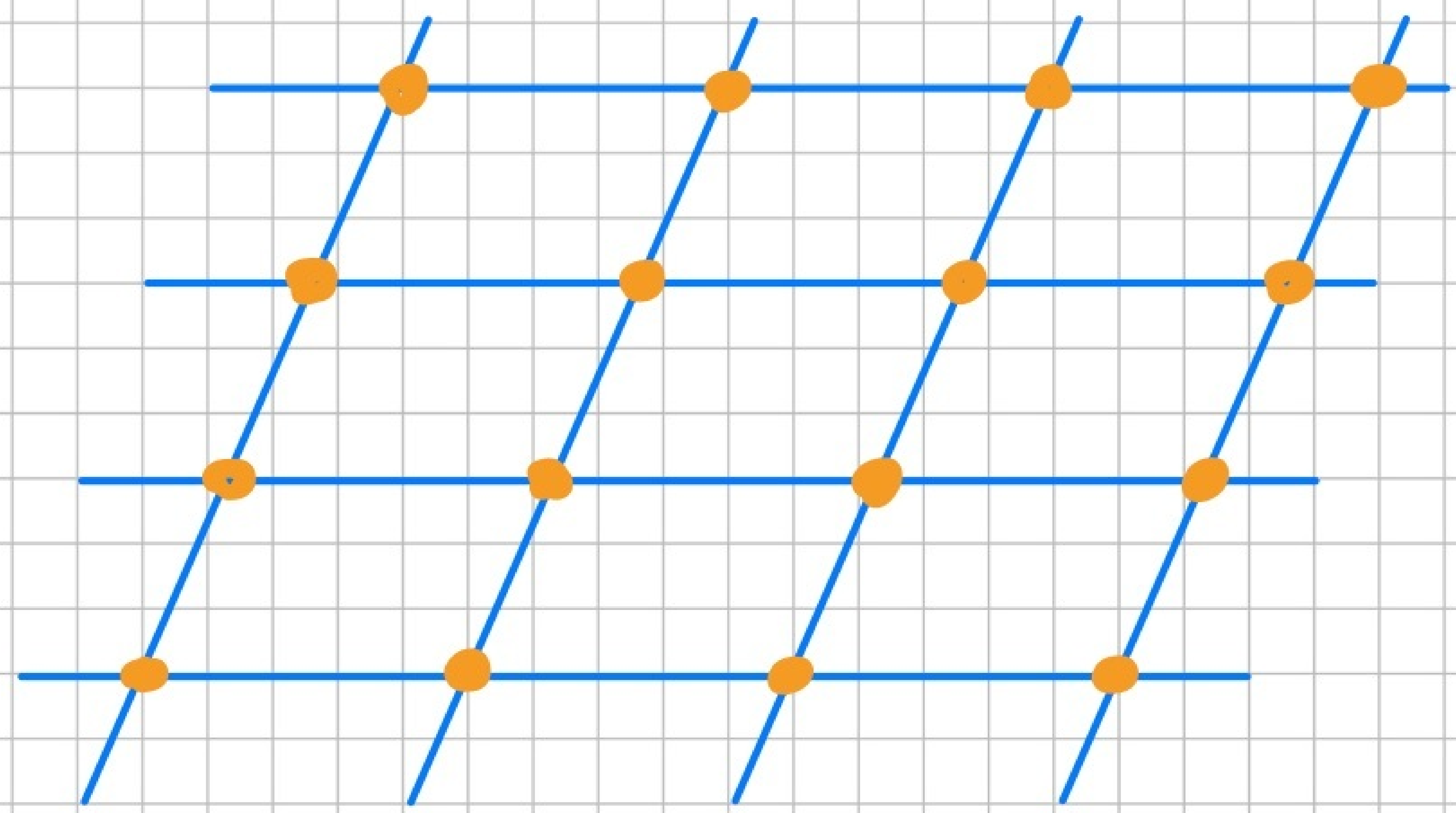
Il s'agit d'un repère construit avec une origine O et un système d'axe auxquels on pourra se référer pour donner la position de l'objet.

On parle aussi de référentiel !

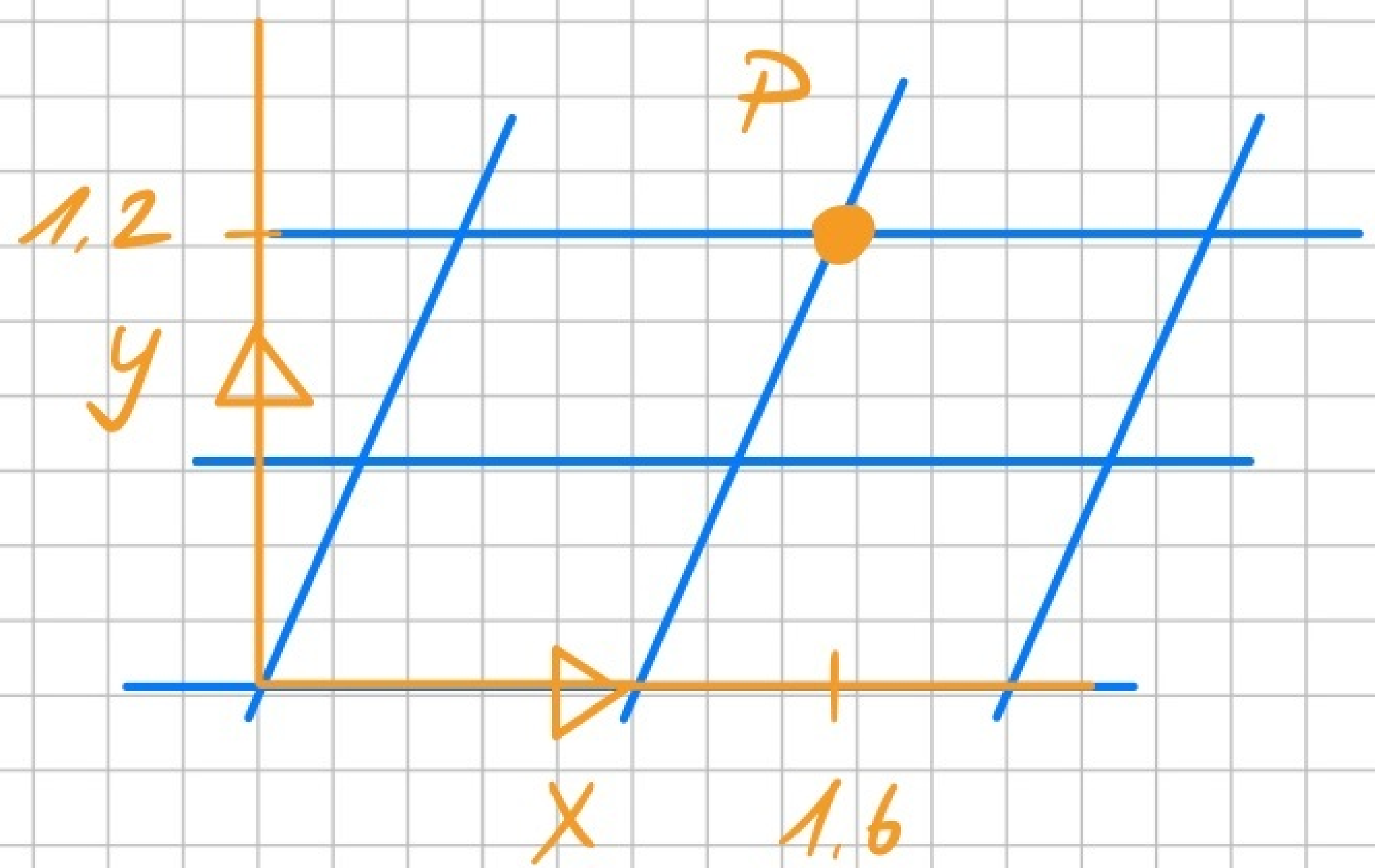
Le choix du référentiel n'est pas unique mais va dépendre de la géométrie du système

Choisit judicieusement, il peut servir à faciliter la représentation du problème.

Prenons par exemple un point P •
qui se déplace uniquement sur les
intersections d'un grillage comme ceci :



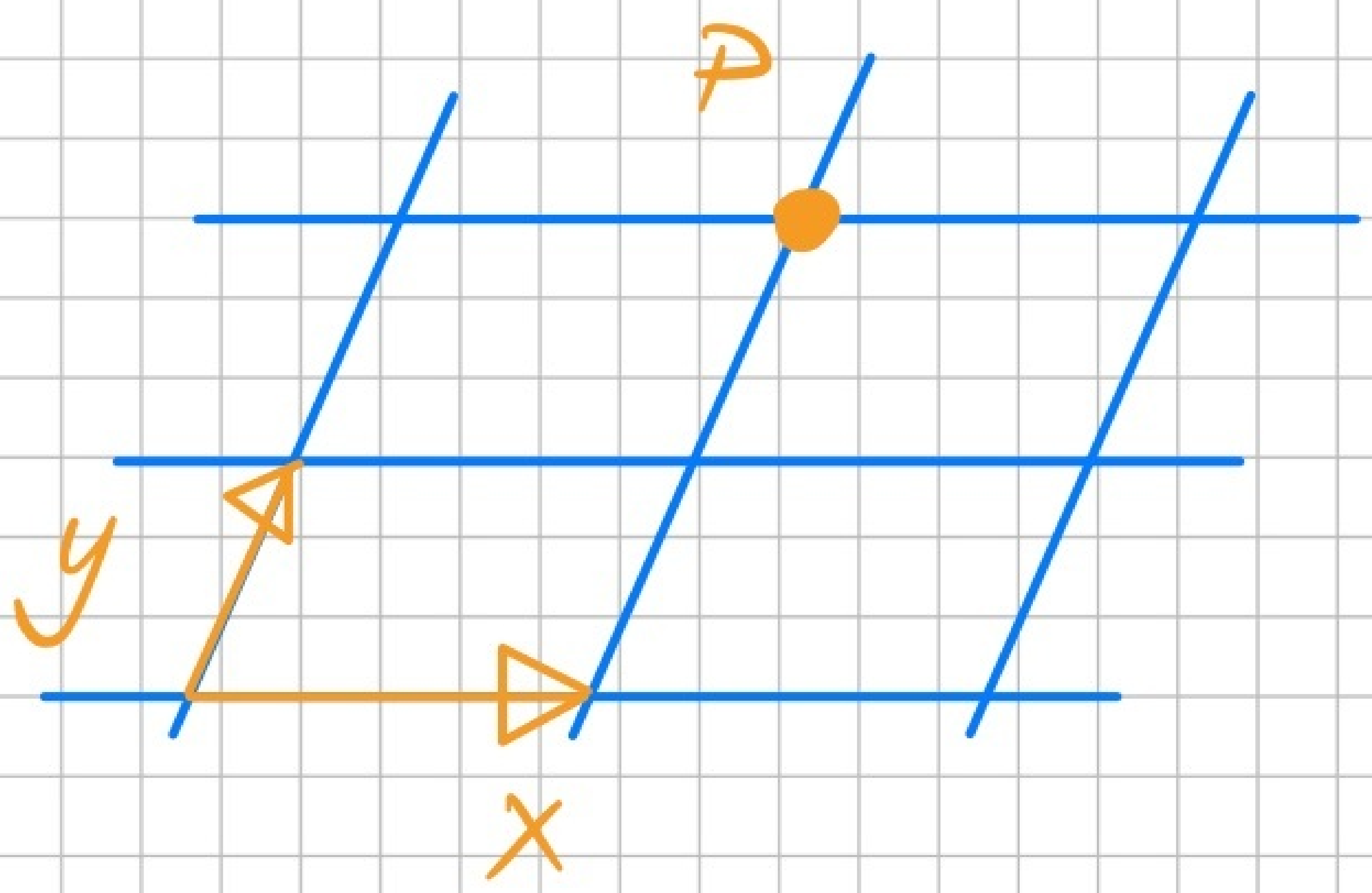
On peut très bien donner sa
position selon deux axes x, y
orthonormés :



P : (1.6 ; 1.2)

mais alors, les coordonnées du
point P : (1.6, 1.2) seront
non-entières et laborieuses à manipuler

Si l'on choisit plutôt un système d'axes qui reproduit la géométrie du problème :



P : (1, 2)

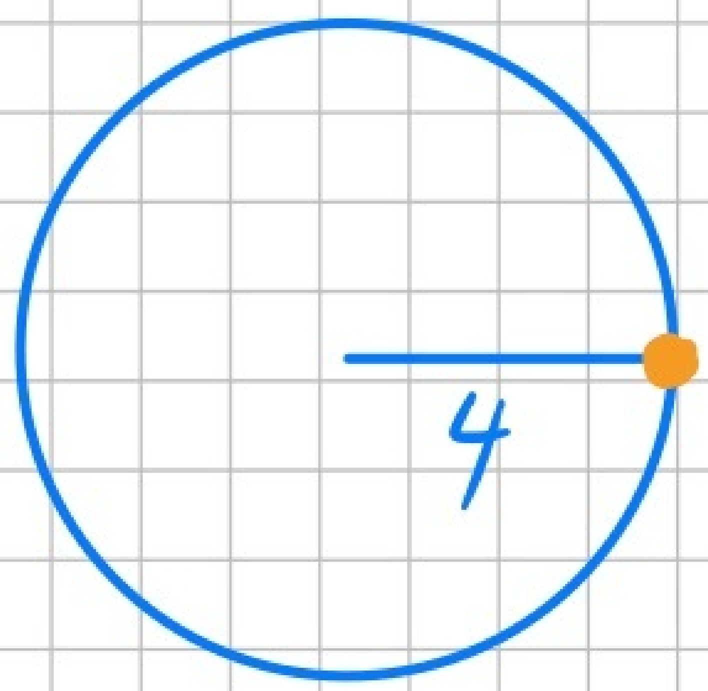
alors les coordonnées du point P seront plus simples à utiliser, et la solution sera plus facile à formuler.

La figure ci-dessus montre également comment le choix d'un système d'axes nous permet de se faire facilement une représentation de l'ensemble des mouvements accessibles à l'objet.

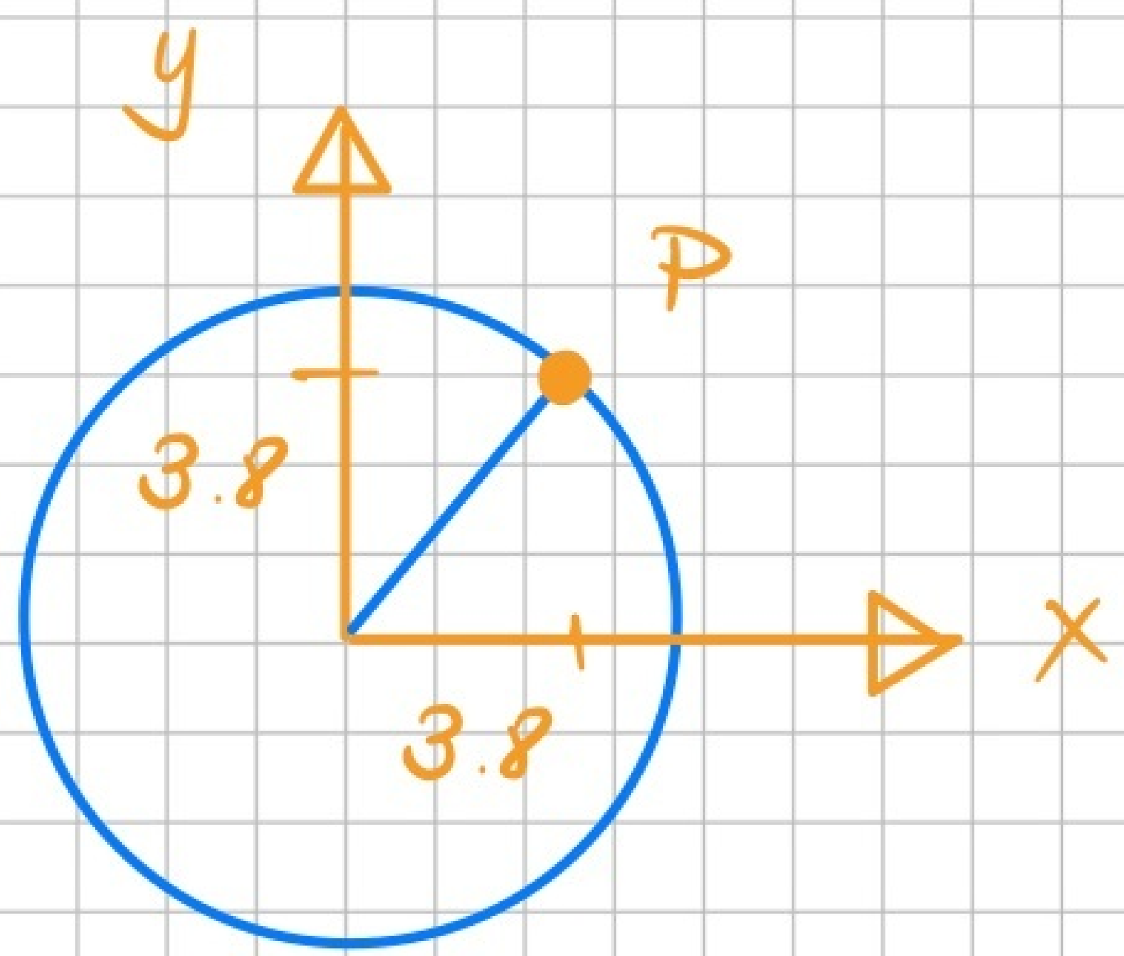
Nous allons voir à présent que le choix judicieux d'un système d'axes représente un avantage bien plus considérable encore : celui de réduire le nombre de coordonnées

Le mouvement sur un cercle

Admettons cette fois-ci que le point P ● se déplace uniquement sur un cercle de rayon 4 .



De nouveau, on peut donner sa position à l'aide d'un système d'axes perpendiculaires :



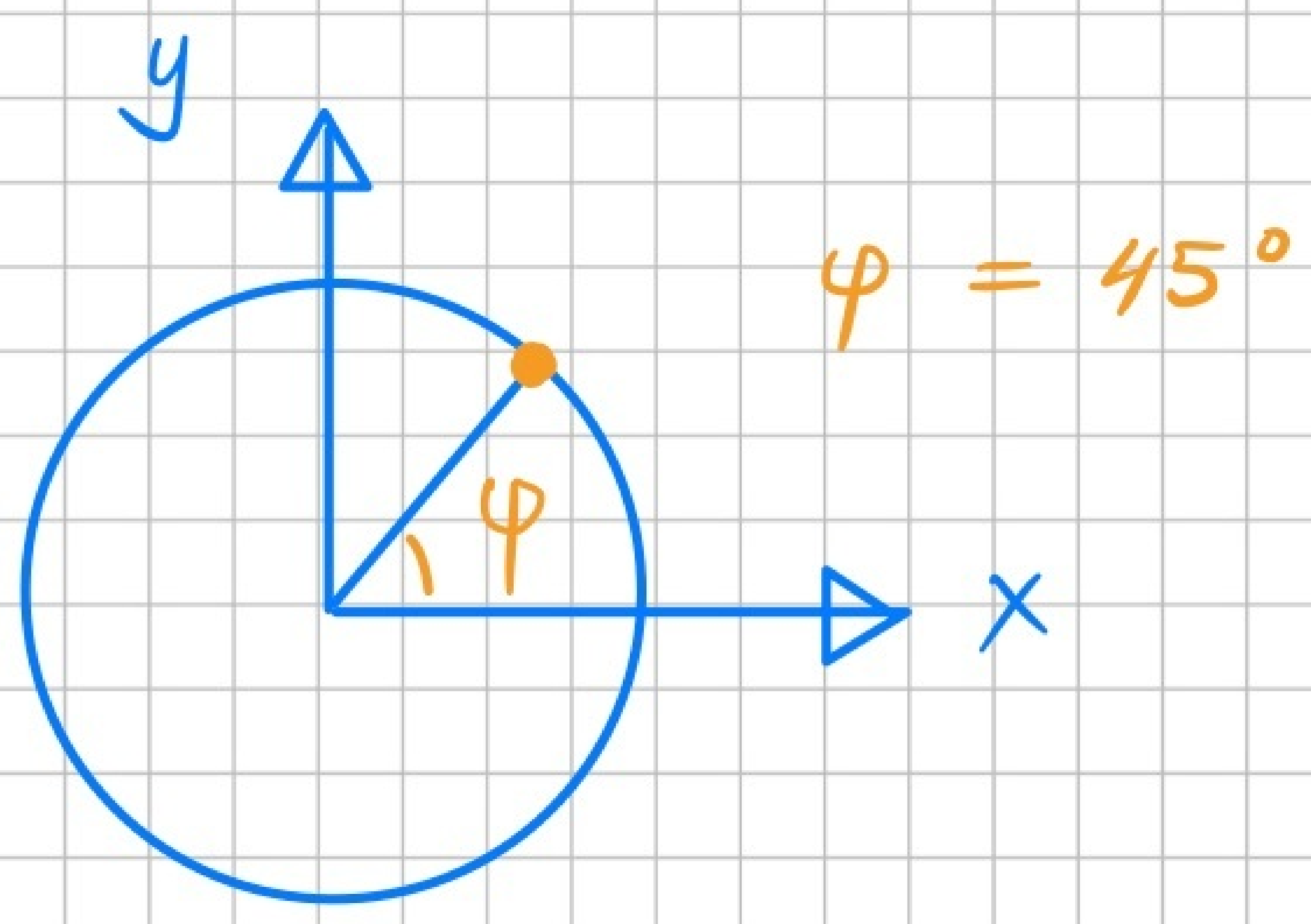
P : (3.8, 3.8)

Le point P se déplace sur le plan de la feuille, il faudra donc deux coordonnées pour le situer.

Si l'on remarque cependant que le point P ne "sortira" pas du cercle de rayon 4, alors on peut dire que ses déplacements se limitent à suivre une ligne.

Comme sur une ligne droite, il ne peut aller qu'en avant ou en arrière.

Comme sur une ligne droite, sa position devrait donc se réduire à une seule coordonnée :



Etant donné que le périmètre ne change jamais, l'angle φ suffit à donner la position du point P.

De deux coordonnées qu'il nous fallait pour décrire les déplacements de l'objet, plus qu'une seule est nécessaire à présent.

La symétrie du problème nous a permit de réduire le nombre de coordonnées.

Une fois de plus nous voyons combiens il est utile d'identifier la géométrie du problème pour en simplifier la représentation.

Voici donc la marche à suivre pour bénéficier des avantages du choix d'un système d'axe :

1) Identifier la géométrie du problème

2) Choisir un système d'axes approprié.

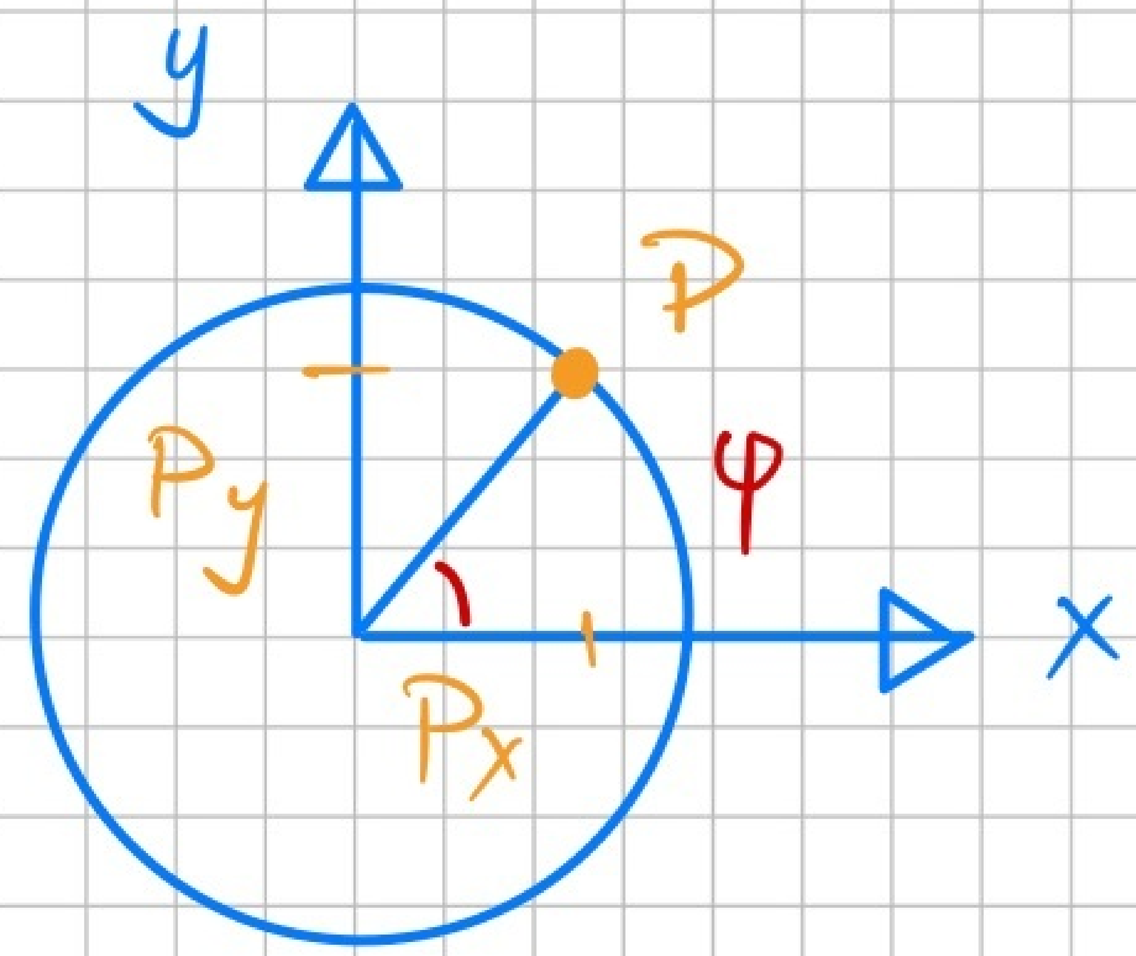
3) Y formuler les équations.

4) Faire les calculs, écrire la réponse.

5) Convertire si nécessaire la solution dans le référentiel cartésien.

Changement de coordonnées

Un cercle de rayon R



Les distances P_x et P_y sont données par les relations trigonométriques :

$$\sin(\varphi) = \frac{P_y}{R}$$

$$P_y = R\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P_x}{R}$$

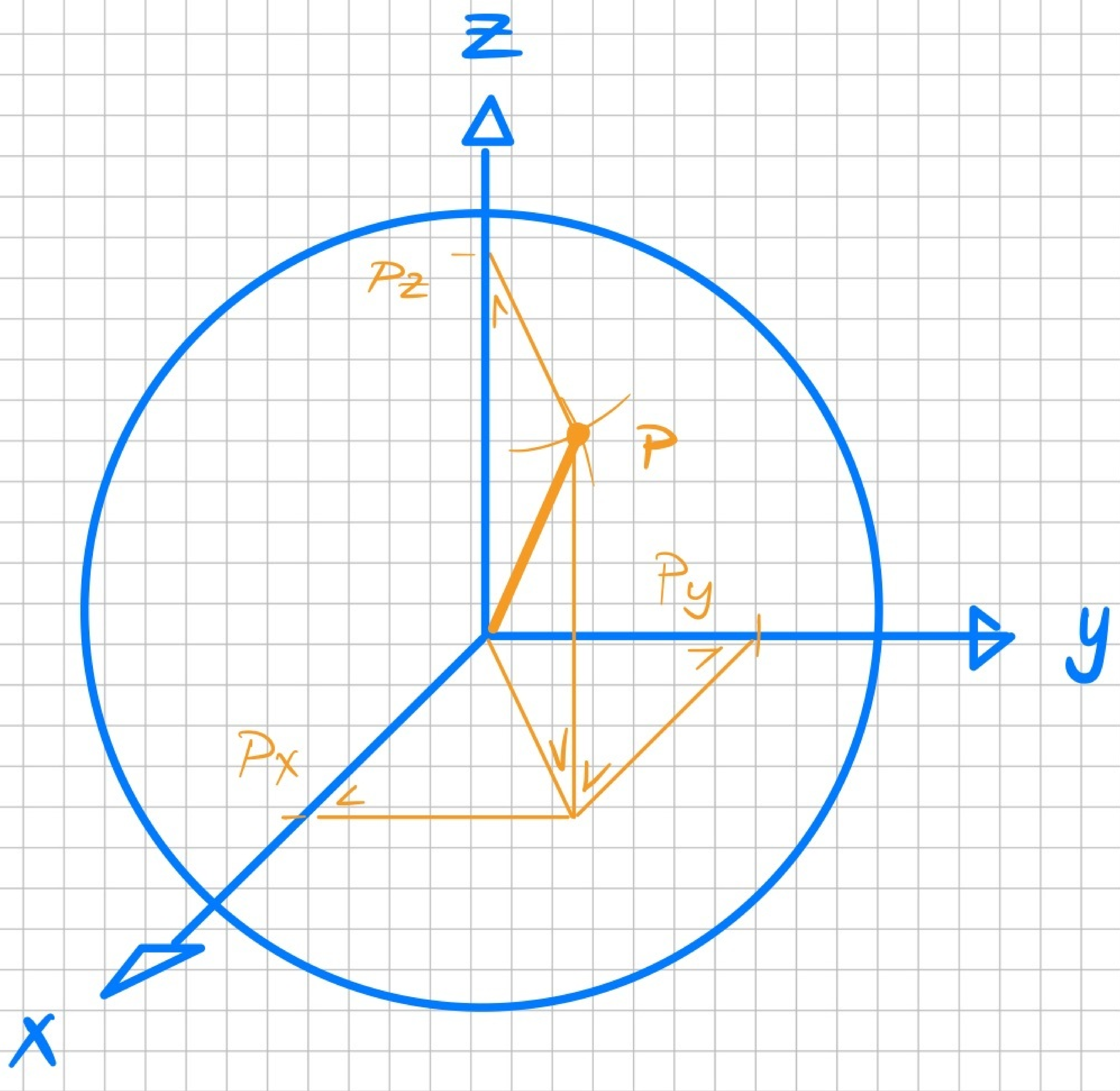
$$P_x = R\cos(\varphi)$$

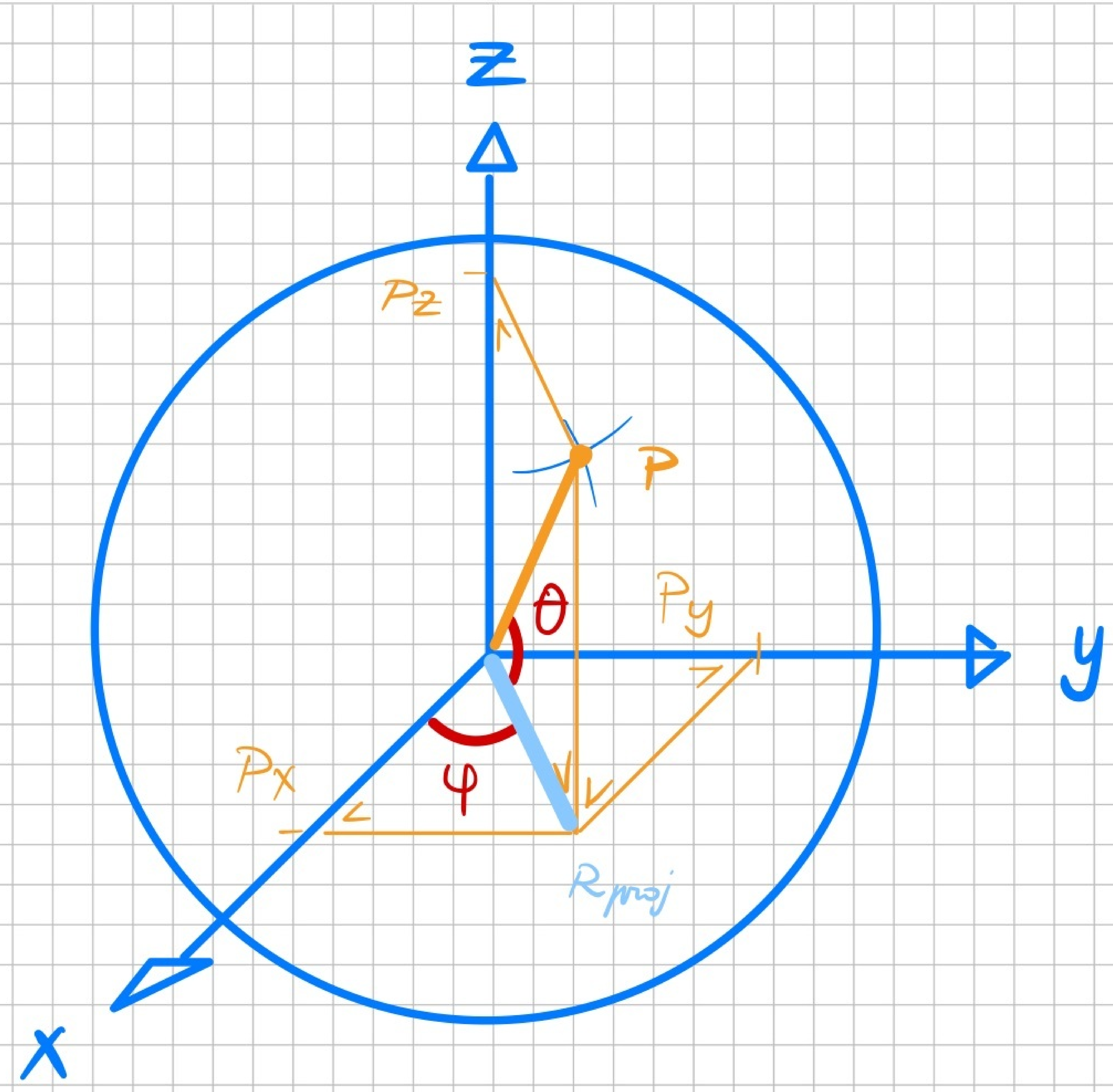
On peut de cette manière convertir la position d'un point d'un système d'axes à un autre.

$$\boxed{\begin{aligned} P_x &= R\cos(\varphi) \\ P_y &= R\sin(\varphi) \end{aligned}}$$

Coordonnées Sphériques

De même pour un point dont les mouvements sont <u>limités à la surface</u> d'une sphère, on peut s'attendre à ce que <u>deux coordonnées</u> soient suffisantes pour décrire ses mouvements.

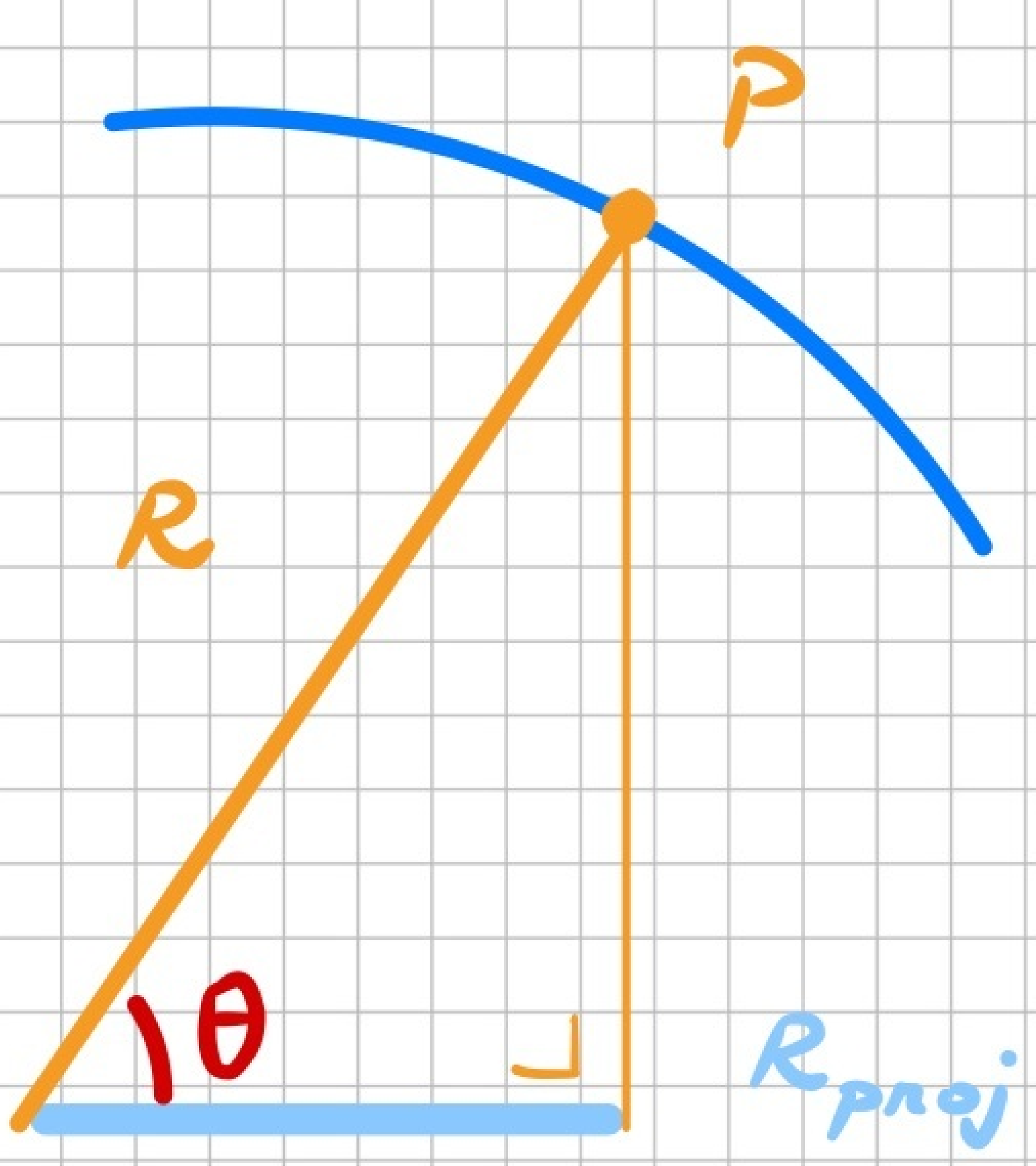




On commence par trouver l'expression de la projection du Rayon passant par un point. On note cette projection sur le plan horizontal : R_{proj}

$$\cos(\theta) = \frac{R_{proj}}{R}$$

$$R_{proj} = R\cos(\theta)$$



Les autres coordonnées viennent en écrivant les relations trigonométriques sur le plan xy (ce qui fait intervenir φ) puis sur le plan formé par le rayon et l'axe z (ce qui fait intervenir θ)

$$\sin(\theta) = \frac{P_z}{R}$$

$$P_z = R\sin(\theta)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P_x}{R_{proj}}$$

$$\begin{aligned} P_x &= R_{proj}\cos(\varphi) \\ &= R\cos(\theta)\cos(\varphi) \end{aligned}$$

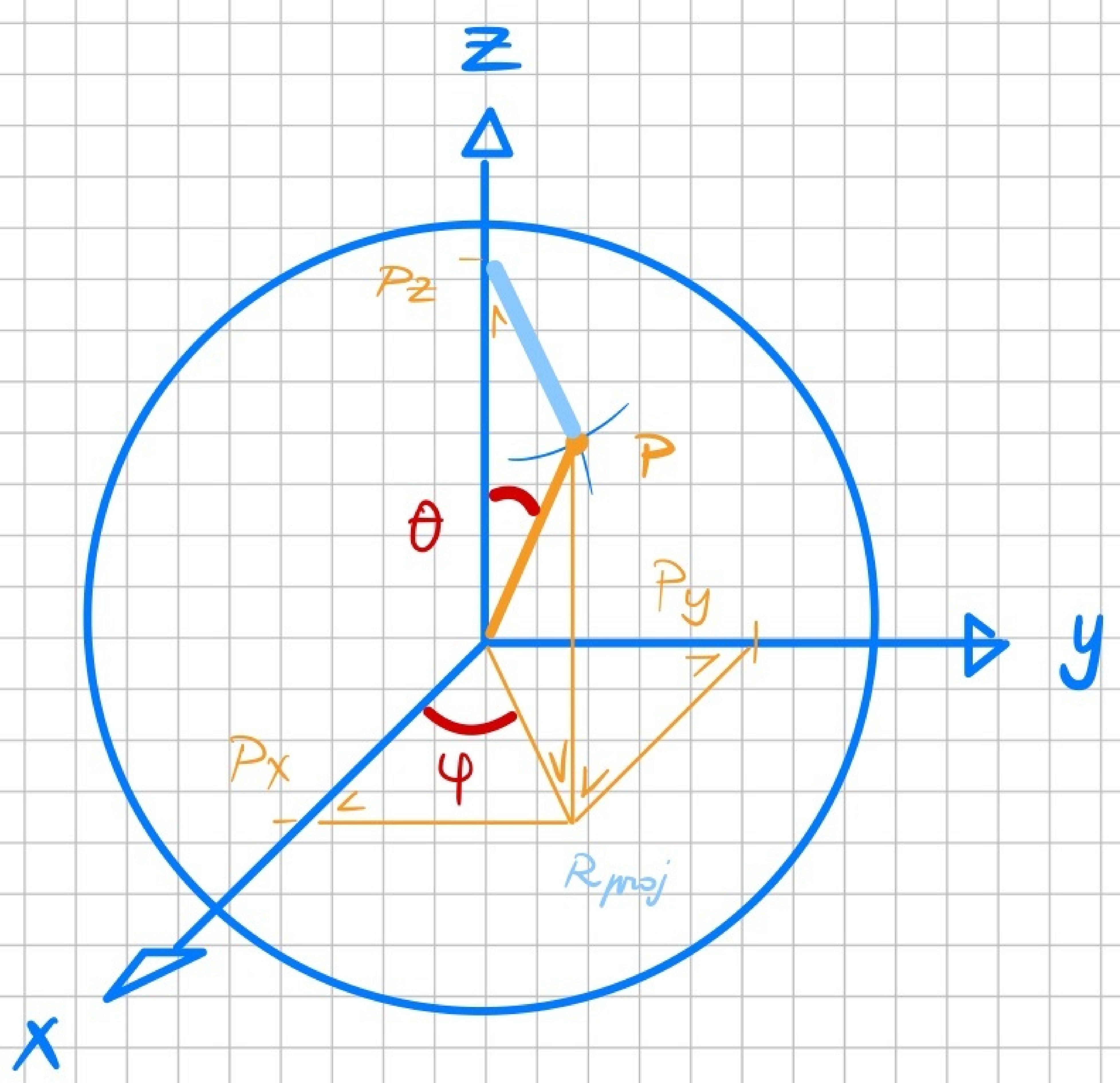
$$\sin(\varphi) = \frac{P_y}{R_{proj}}$$

$$\begin{aligned} P_y &= R_{proj}\cdot\sin(\varphi) \\ &= R\cos(\theta)\sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_x &= R\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ P_y &= R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ P_z &= R\sin(\theta) \end{aligned}}$$

Convention ISO

Selon où l'on choisit de positionner l'angle θ on obtiendra des expressions différentes. Nous donnerons simplement ici l'expression du changement de repère lorsque les coordonnées sphériques suivent la convention ISO.



$$P_x = R\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$P_y = R\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$P_z = R\cos(\theta)$$

ISO

Exemple Premier

Exercice 3

E W N S

La terre étant assimilée à une sphère de rayon R, calculer la distance a vol d'oiseau entre le point A de longitude θ_1 et de latitude $\emptyset_1$ et le point B de θ_2 et de latitude $\emptyset_2$.
On rappelle que cette distance est donnée par la longueur de l'arc de cercle intersection de la sphère et du plan OAB.

Lat. Long.

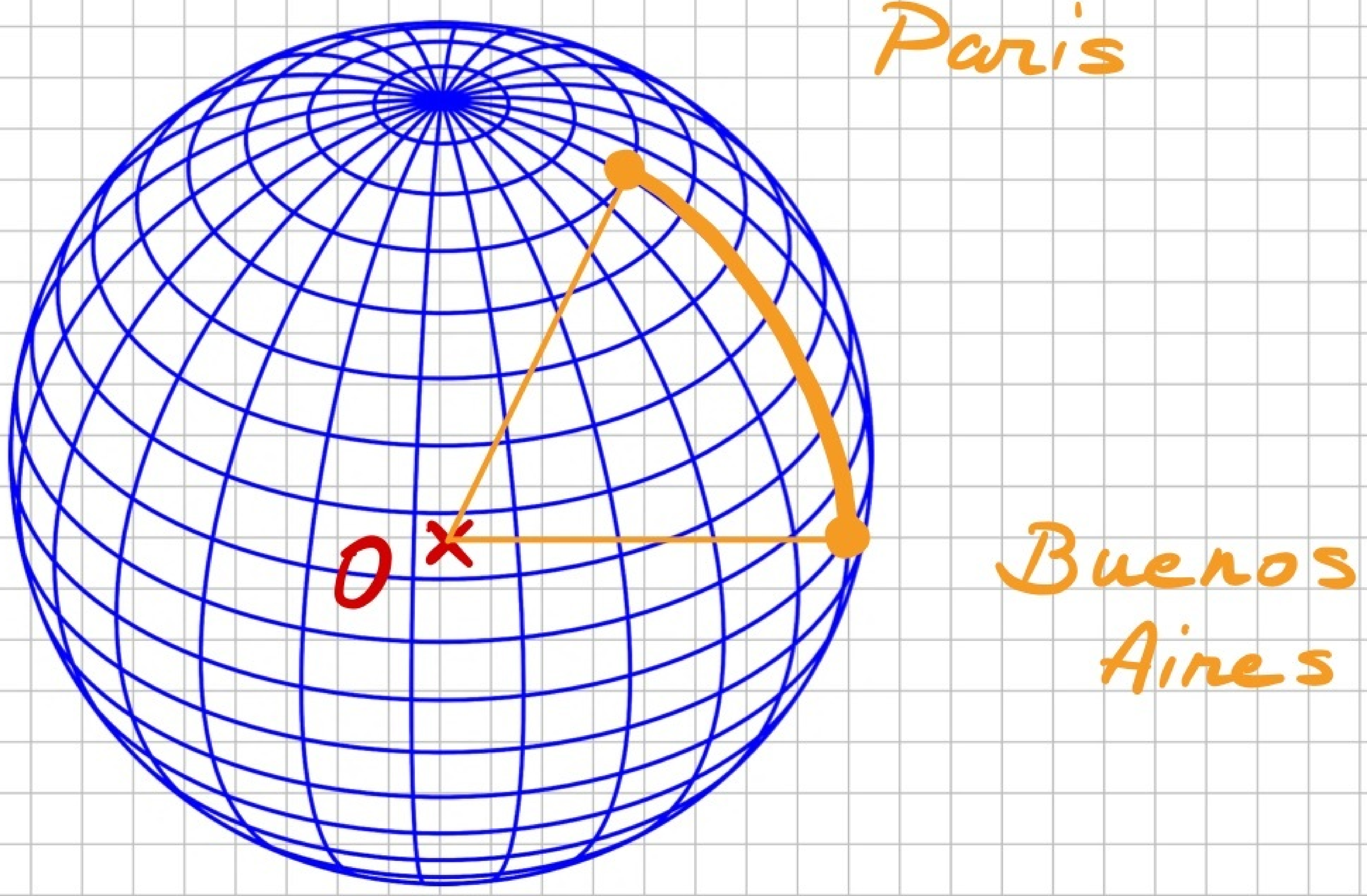
Application numérique : Calculer la distance entre Paris (48°49'N, 2°19'E) et Buenos Aires (34°40'S, 58°30'W). On prendra $R = 6378$.

$60' = 1°$

$3600'' = 1°$

Corrigé :

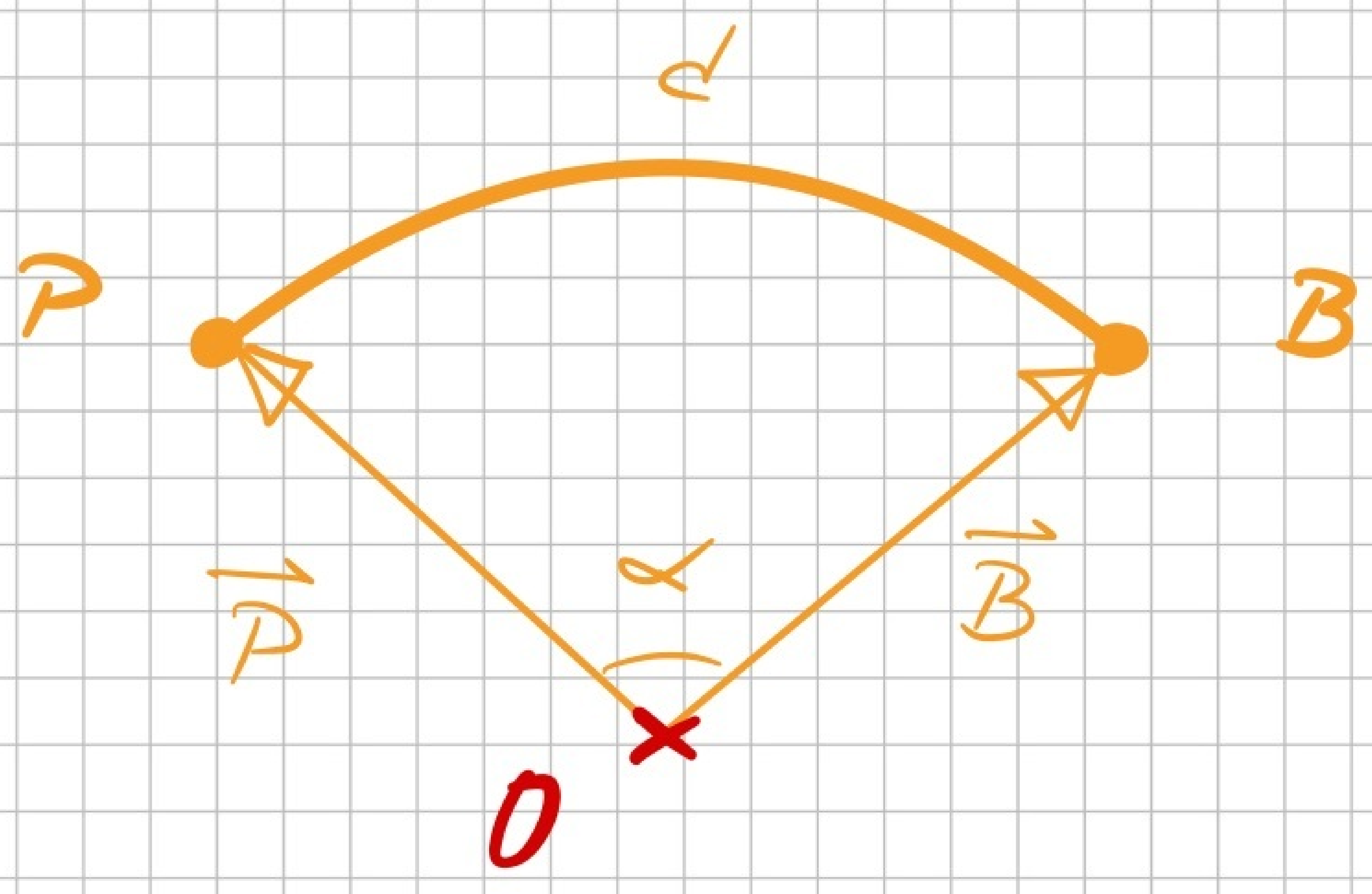
La distance entre deux villes, ici Paris (P) et Buenos Aires (B) suit la courbure de la planète :



O désigne le centre de la planète

Pour cette raison, la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{PB}$ représente cette <u>distance</u> correctement

On la représente ici par la lettre <u>d</u>



$\vec{P}$ désigne le vecteur qui pointe sur Paris depuis le centre de la terre.
Sa norme $\|\vec{P}\|$ est égale au rayon de la Terre R.

$\vec{B}$ quant à lui pointe sur Buenos Aires sa norme aussi vaut R

La longeur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{PB}$ est donné par

$$\boxed{d = R\alpha}$$

Le rayon de la terre étant connu, c'est l'angle α qui nous intéresse pour calculer la distance entre ces deux villes.

Cet angle est donné par le produit scalair entre les deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{B}$.

$$\vec{P} \cdot \vec{B} = \|\vec{P}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \alpha$$

$$= R \cdot R \cdot \alpha$$

$$= R^2 \alpha$$

Or, le produit scalair est aussi donné par la somme des produits des coordonnées de ces même vecteurs.

Notons les $\vec{P} : \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$ $\vec{B} : \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

On a : $\vec{P} \cdot \vec{B} = P_x B_x + P_y B_y + P_z B_z$

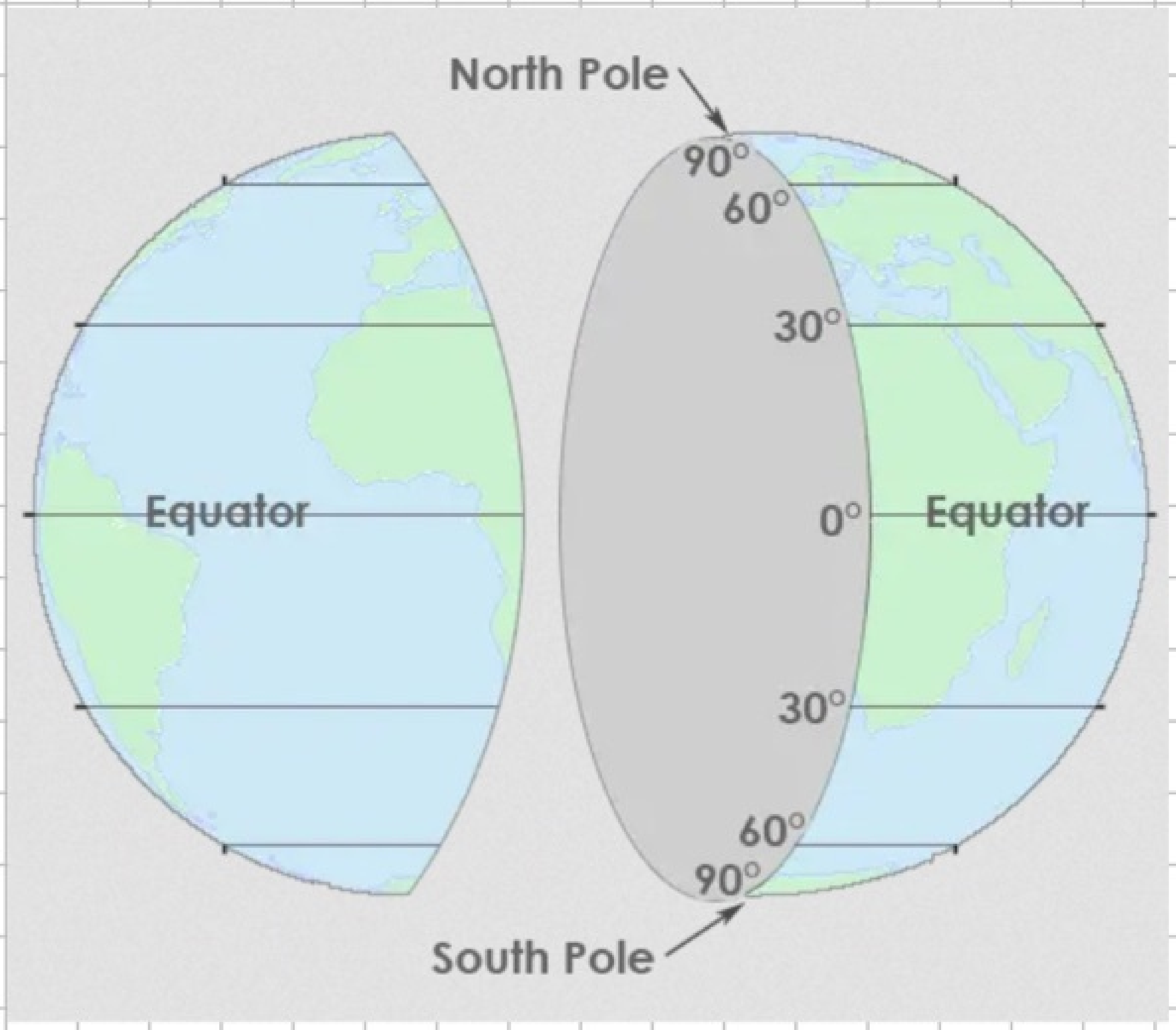
Or, $\vec{P} \cdot \vec{B} = R^2 \alpha$

Cherchons donc les coordonnées de ces deux vecteurs pour trouver α

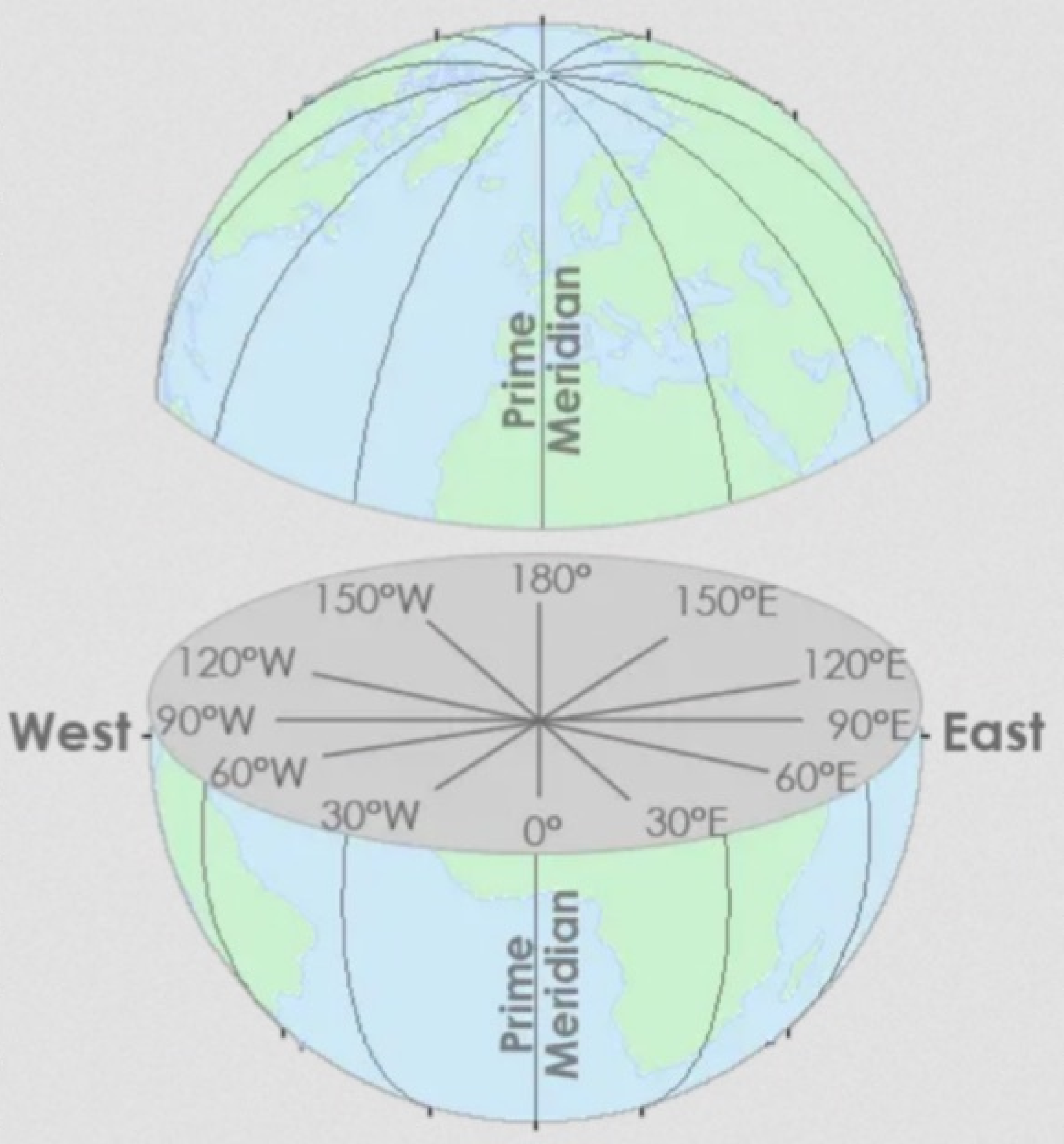
Pour localiser un emplacement sur Terre, on utilise ses coordonnées géographiques

Le plus souvents, elles sont donnée en terme de latitude et longitude.

Il s'agit de coordonnées sphériques qui s'expriment en degrès

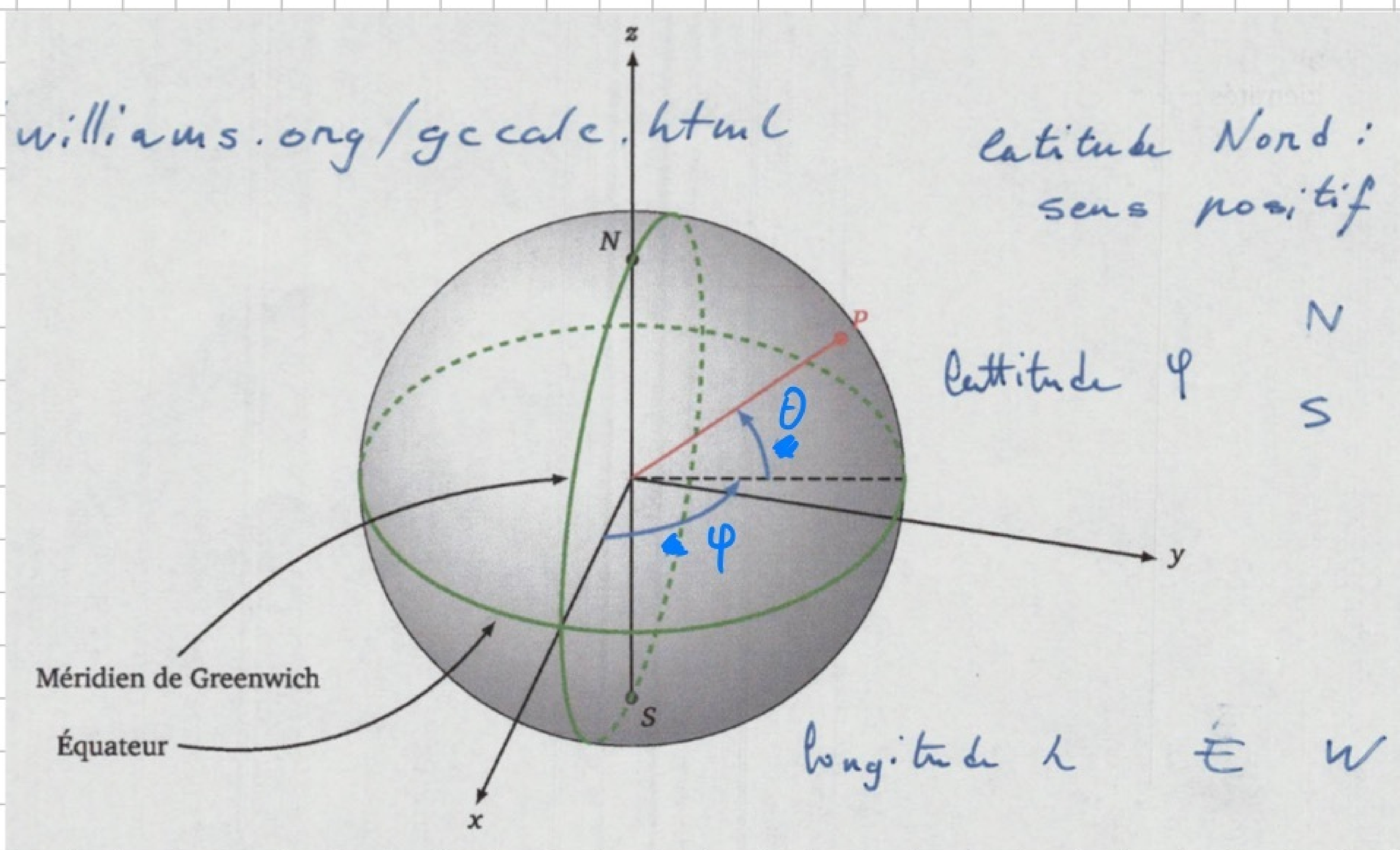


La latitude permet de repérer un point selon la direction Nord - Sud. On choisi l'équateur comme référence et le sens positif est vers le nord.



La longitude permet de repérer un point selon la direction Est - Ouest On choisit le méridien de Greenwitch comme référence et le sens positif est vers l'Est.

Dans ce qui suit, on désignera
la longitude par φ
et la latitude par θ



On exprime souvent ces angles en
degrès, minute, seconde.

Il s'agit de minutes d'arc (1')
et de secondes d'arc (1")

Pour les convertire en degrès,
il suffit de savoir que 60 minutes
d'arc (60') valent 1° et que
3600 secondes d'arc (3600")
valent elles aussi un degrès.

$$60' = 1^\circ$$
$$3600'' = 1^\circ$$

$$\vec{P} : \begin{pmatrix} R\cos\theta_P \cos\varphi_P \\ R\cos\theta_P \sin\varphi_P \\ R\sin\theta_P \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} : \begin{pmatrix} R\cos\theta_B \cos\varphi_B \\ R\cos\theta_B \sin\varphi_B \\ R\sin\theta_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{P} \cdot \vec{B} &= R\cos\theta_P \cos\varphi_P \cdot R\cos\theta_B \cos\varphi_B + \\
&\quad R\cos\theta_P \sin\varphi_P \cdot R\cos\theta_B \sin\varphi_B + \\
&\quad R\sin\theta_P \cdot R\sin\theta_B \\
&= R^2 \cos\theta_P \cos\varphi_P \cos\theta_B \cos\varphi_B + \\
&\quad R^2 \cos\theta_P \sin\varphi_P \cos\theta_B \sin\varphi_B + \\
&\quad R^2 \sin\theta_P \sin\theta_B \\
&= R^2 \cos\theta_P \cos\theta_B \left(\cos\varphi_P \cos\varphi_B + \sin\varphi_P \sin\varphi_B \right) + \\
&\quad R^2 \sin\theta_P \sin\theta_B
\end{aligned}$$

$$\cos X \cos Y + \sin X \sin Y = \cos(X - Y)$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \cos\theta_P \cos\theta_B \cdot \cos(\varphi_P - \varphi_B) + \\
&\quad R^2 \sin\theta_P \sin\theta_B \\
&= R^2 \left(\cos\theta_P \cos\theta_B \cos(\varphi_P - \varphi_B) \right. \\
&\quad \left. \sin\theta_P \sin\theta_B \right)
\end{aligned}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{B} = R^2 \left(\cos\theta_P \cos\theta_B \cos(\varphi_P - \varphi_B) + \sin\theta_P \sin\theta_B \right)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{B} = R^2 \cdot \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cos\alpha = \cos\theta_P \cos\theta_B \cos(\varphi_P - \varphi_B) + \sin\theta_P \sin\theta_B$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer la valeur de ces angles, deux par ville, exprimées en Rd.

Paris : 48°49'N, 2°19'E

Latitude θ_P : $48°49' = 48° + \frac{49}{60}° \; N$

$= 48{,}8167° \; N$

$= \underline{0.8520 \; Rd} \; N$

Longitude φ_P : $2°19' = 2° + \frac{19}{60}° \; E$

$= 2{,}3167° \; E$

$= \underline{0.0404 \; Rd} \; E$

Buenos Aires : $34°40'S$, $58°30'W$

Latitude θ_B : $34°40'S$ $= 34° + \frac{40}{60}°$ S

$= 34.6667°$ S

$= 0.6050$ Rd S

Il s'agit de latitude Sud.
Le sens positif cependant,
est en direction du Nord.

$= 2\pi - 0.6050$ Rd N

$= 5.6781$ Rd N

Longitude φ_B : $58°30'W$ $= 58° + \frac{30}{60}°$ W

$= 58.5°$ W

$= 1.0210$ Rd W

A nouveau, il s'agit d'un angle
exprimé dans le sens inverse du
sens positif. On écrit donc :

$= 2\pi - 1.0210$ Rd E

$= 5.2622$ Rd E

On a donc :

Paris : $\theta_P = 0.8520$ Rd N
$\varphi_P = 0.0404$ Rd E

Buenos Aires : $\theta_B = 5.6781$ Rd N
$\varphi_B = 5.2622$ Rd E

On peut maintenant calculer α

$$\cos\alpha = \cos\theta_P \cos\theta_B \cos(\varphi_P - \varphi_B) + \sin\theta_P \sin\theta_B$$

$$= \cos(0.8520)\cos(5.6781)\cdot \cos(0.0404 - 5.2622) + \sin(0.8520)\sin(5.6781)$$

$$= 0.5416 \cdot 0.4877 + (-0.4281)$$

$$= -0.1639$$

$$\underline{\alpha = 1.7355 \text{ Rd}}$$

Le rayon de la Terre étant important, une petite seconde d'arc va influencer grandement la longeur de l'arc de cercle.

C'est pour cette raison que l'on garde <u>4 chiffres significatifs</u> !

Avec l'angle α, on peut maintenant calculer la distance a vol d'oiseau entre Paris et Buenos Aires.

On prend comme rayon de la Terre $R = 6378$ km et on calcule

$$d = R\alpha$$
$$= 6378 \cdot 1.7355$$
$$= 11069 \text{ km}$$

Google quant à lui nous retourne :

11,043 km

Distance from Paris to Buenos Aires

Une différence qui s'explique ainsi :

1) Le rayon de la planète n'est pas constant

2) Nous avons utilisé des coordonnées différentes de celles de google.

1) Notre planète n'étant pas exactement sphérique, le rayon de la Terre varie entre Paris et Buenos Aires alors que nous avons utilisé un rayon R constant tout au long de nos calculs.

2) Une petite différence de seconde d'arc entre les coordonnées utilisées dans cet exercice et celles utilisées par Google aboutit à une différence importante sur la longueur de l'arc de cercle.

Notre réponse toutefois est très raisonnable, avec une différence de ~ 30 km sur une distance de 11'000 km, nous pouvons être assuré que <u>nos calculs sont corrects</u>